

# 1. Модел кретања

Кинематика, у најопштијој формулацији, може да буде дефинисана као *геометрија кретања*. Другим речима, применом основног апарата математичке анализе успостављају се зависности између елементарних кинематичких величина, а на тај начин се и решава постављени проблем. Претпоставља се да је систем мобилног робота из једног положаја, изабраним кретањем, прешао у неки други положај, а приликом анализе тог кретања не занимају нас физичке величине (нпр. силе) које су произвеле кретање нити рецимо оне силе које се супротстављају самом кретању. У фокусу кинематичке анализе је само кретање, а узрок и последице су ирелевантни.

Кинематичка анализа мобилних робота је већ дуго низ година једна од најинтересантијих области роботике, без обзира да ли се ради о "точкашима", "гусеничарима" или роботима који своје кретање остварују помоћу ногу. Неће звучати претенциозно ако се каже да је већина кинематичких модела мобилних робота већ успостављена у потпуности и потребно их је само проширити и уопштити у циљу потпуне имплементације на реалне проблеме.

Сви до сада изведени кинематички модели мобилних робота који своје кретање остварују помоћу тачкова су детерминистичке природе. Карактер промене параметара процеса је детерминистички и самим тим се не дозвољава постојање ни најмање грешке. Наравно, у реалним проблемима детерминистички модели веома брзо покажу сва своја ограничења па је то један од основних разлога примене стохастичких метода. Наиме, стохастичке методе дозвољавају постојање грешке модела чиме се знатно добија на општости модела, а самим тим и на могућност имплементације на стварном моделу у реалном времену и окружењу.

Са кинематичке тачке гледишта, у општем случају вектор стања система чине следеће компоненте:

$$x_t = \{x, y, z, \theta, \psi, \varphi\}^T \quad (1.1)$$

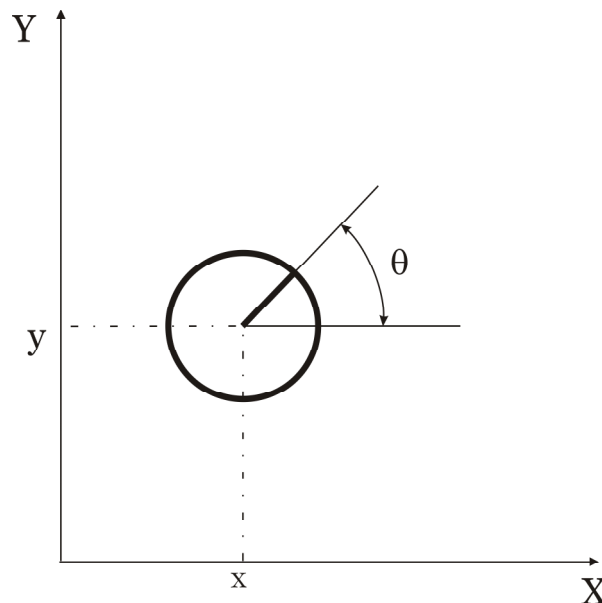
где су  $x$ ,  $y$  и  $z$  – компоненте вектора које дефинишу позицију мобилног робота, а  $\theta, \psi, \varphi$  углови који одређују оријентацију мобилног робота у односу на неки спољашњи координатни систем. У оквиру овог курса, кретање робота ће бити моделирано као *равно кретање*, па је сходно броју степени слободе<sup>1</sup> крутог тела у равни довољно дефинисати вектор стања чије су компоненте:

$$x_t = \{x, y, \theta\}^T \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup> Број независних параметара који једнозначно дефинишу кретање тела.

где  $x$ ,  $y$  представљају координате тежишта мобилног робота у односу на неки спољашњи координатни систем а угао  $\theta$  одређује оријентацију робота у односу на  $x$  осу (слика 1.1).



**Слика 1.1**  
*Дефиниција степени слободе  
мобилног робота у равни  $x$ - $y$*

Модел промене стања је представљен следећом релацијом :

$$p(x_t / x_{t-1}, u_t) \tag{1.3}$$

Иако је термин *модел промене стања* погоднији, није грешка ни да се модел промене стања назове *модел кретања*. Наиме, мобилни робот из стања које је дефинисано вектором  $x_{t-1}$  у тренутку  $t-1$  управљањем  $u_t$  прелази у стање које је одређено вектором  $x_t$  у тренутку  $t$ . С обзиром да мобилни робот мора да промени позицију и у општем случају и оријентацију да би променио стање, сасвим је јасно да то може бити остварено једино кретањем. То је и основни разлог увођења термина *модел кретања*. Приликом дефинисања модела кретања мобилног робота на основу кога ће локализација бити извршена, могуће је дефинисати два основна правца:

- ♦ *Модел кретања на основу брзина (Брзински модел кретања)*– у овом моделу транслаторна и угаона брзина кретања мобилног робота представљају *управљања*  $u(t)$  која изазивају промену позиције и оријентације током експлоатације. Основна претпоставка овог модела кретања је да се транслаторна и угаона брзина кретања могу контролисати, односно да се њима може директно управљати, што је и основна претпоставка на којој почива овај модел.
- ♦ *Модел кретања на основу пређеног пута (Одометрија)* – у овом моделу *управљање*  $u(t)$  је дефинисано пређеним путем тачкова мобилног робота током тачно дефинисаног временског интервала. На основу читавања података са *енкодера*, и након интеграције, могу се одредити параметри пређеног пута неопходни за постављање модела. Међутим, посматрано са гледишта управљања роботом, пређени пут тачкова дефинитивно потпада под мерења (сензорске информације) и у суштини представља резултат

управљања и рада мотора, ипак у овом моделу кретања основна претпоставка је да управо пређени пут, као директан резултат управљања моторима мобилног робота, може бити усвојен за управљачку величину. Основни разлог овако усвојеног *управљања  $u(t)$*  је могућност да се у оквиру управљачког софтвера мобилног робота пређени пут директно контролише унапред дефинисаним потпрограмом главног управљачког алгоритма на следећи начин: *move\_forward(distance)* или *move\_backward(distance)*.

Општи кинематички модел кретања мобилног робота базиран на стохастички *не постоји* и у суштини за сваки појединачни проблем потребно је извршити анализу, на чијим резултатима ће се формирати и сам модел. Основна поставка кинематичког модела кретања зависи како од основне кинематичке конфигурације мобилног робота (број тачкова, укупни број степени слободе, број степени слободе којима се може управљати итд. ), тако и од карактеристика окружења у коме робот остварује кретање, управљачког алгоритма итд. Самим тим модел кретања се усваја и развија зависно од специфичности проблема.

### 1.1 Модел кретања на основу пређеног пута

Као што је у основној формулацији овог модела кретања речено, мерења очитана са енкодера након интеграције дефинишу се као *управљања* и као таква "прослеђују" Калмановом филтеру (прилог В) у циљу одређивања позиције и оријентације мобилног робота.

Важно је напоменути да сваки модел који се заснива на *одометрији* користи искључиво *релативне координате*, односно, пређени пут се мери помоћу енкодера од неког положаја у коме је мобилни робот био у тренутку  $t-1$  до неког положаја у тренутку  $t$ , што значи да је измерени пређени пут пут који је робот прешао између ова два узастопна положаја. Наравно, релативни пређени пут између ова два положаја неком математичком трансформацијом је неопходно "пребацити" у спољашњи координатни систем у коме је и дата мапа окружења, а у односу на који и треба извршити локализацију. С друге стране, таква погодна трансформација координата, која би успоставила математичку зависност између спољашњег координатног система и координатног система робота у коме су и дефинисана померања, а тиме и мерења пређеног пута, *не постоји*, па је то заправо основни разлог што се користе искључиво релативна померања и мерења пређеног пута. Међутим, таква трансформација би у потпуности успоставила и одредила поменуто нелинеарно пресликавање, што је практично немогуће, с обзиром на немогућност дефинисања свих ограничења и реалних утицаја током кретања. Управо претходна чињеница представља кључни разлог постојања и развијања метода локализације мобилних робота.

У наставку ће бити представљен једноставан модел кретања изведен на основу пређеног пута мобилног робота. Модел може да се примени искључиво на оне мобилне роботе који имају два погонска тачка<sup>2</sup> која се могу окретати *потпуно независно* један од другог. Другим речима, управљањем смером обртања тачкова контролише се скретање мобилног робота. На "осовинама" тачкова су монтирани енкодери који мере углове ротације (обртање тачкова). Модел се може успоставити

---

<sup>2</sup> *Differential Drive Mobile Robots*, енг.

(математички доказати) без већих проблема на следећи начин. С обзиром да се анализа односи на раванско кретање, што значи да се претпоставља кретање робота током експлоатације у сваком временском тренутку, а да може бити описано са три независна параметра (степен слободе) дата вектором чије су компоненте очигледно:

$$x' = \{x \quad y \quad \theta\}^T \quad (1.4)$$

Одређивање позиције и оријентације за овакав тип мобилног робота, који своје кретање остварује помоћу точкова, своди се на интеграцију података очитаних са енкодера који се налазе на точковима, односно, сумирање пређеног пута погонских точкова у сваком инкременталном временском интервалу  $\Delta t$ :

$$\Delta x = \Delta s \cos(\theta + \Delta\theta/2) \quad (1.5)$$

$$\Delta y = \Delta s \sin(\theta + \Delta\theta/2) \quad (1.6)$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{b} \quad (1.7)$$

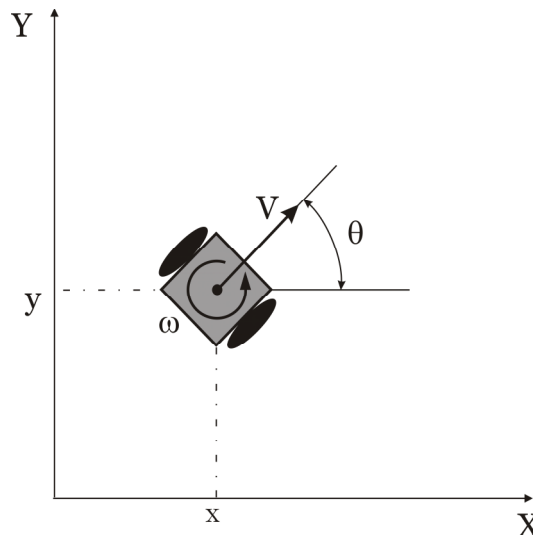
$$\Delta s = \frac{\Delta s_d + \Delta s_l}{2} \quad (1.8)$$

где су

$(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta)$  - величине које дефинишу путању мобилног робота у току интервала  $\Delta t$ ,

$(\Delta s_d, \Delta s_l)$  - пређени пут десног и левог погонског точка респективно,

$b$  - размак између точкова.



**Слика 1.2**  
Мобилни робот са два независна погонска точка

На слици 1.2 је приказан основни модел, одакле се на основу геометрије једноставно одређује вектор стања мобилног робота након извршеног *управљања*:

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta s \cos(\theta + \Delta\theta/2) \\ \Delta s \sin(\theta + \Delta\theta/2) \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Даље се, након сређивања, одређује следећи израз:

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta s_d + \Delta s_l}{2} \cos(\theta + \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{2b}) \\ \frac{\Delta s_d + \Delta s_l}{2} \sin(\theta + \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{2b}) \\ \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{2b} \end{bmatrix} \Rightarrow x' = f(x, y, \theta, \Delta s_d, \Delta s_l) \quad (1.10)$$

што представља основни кинематички модел кретања мобилног робота изведен на основу пређеног пута погонских тачкова. Из горње једнакости може се видети које величине утичу на промену али и на могућност израчунавања позиције и оријентације. Израз (1.10) заправо представља *модел кретања* (модел промене стања)  $p(x_t / x_{t-1}, u_t)$  који фигурише у основним једначинама поменутог Калмановог филтера.

Наравно, претходна формулација *модела кретања базираног на одометрији* није и једина, постоји велики број развијених модела кретања од којих се издваја следећи модел (1.11). Наиме, за разлику од претходног модела кретања, у коме су управљања дефинисана релацијом  $u(t) = \{\Delta s_d \ \Delta s_l\}^T$  у овом моделу се претпоставља да су управљања одређена на следећи начин:

$$u(t) = \{\bar{x}_{t-1} \ \bar{x}_t\}^T \quad (1.11)$$

где су

$\bar{x}_{t-1} = \{\bar{x}_{t-1} \ \bar{y}_{t-1} \ \bar{\theta}_{t-1}\}^T$  - вектор стања система који обухвата позицију и оријентацију мобилног робота у тренутку  $t-1$ ,

$\bar{x}_t = \{\bar{x}_t \ \bar{y}_t \ \bar{\theta}_t\}^T$  - вектор стања система у тренутку  $t$ .

Наравно, управљања у овом моделу су управо релативна померања  $(\bar{x}_{t-1}, \bar{x}_t)$ , односно кретања мобилног робота посматрана из роботског координатног система при чему је веза између унутрашњег и спољашњег координатног система потпуно непозната.

## 1.2 Брзински модел кретања мобилног робота

За разлику од модела кретања изведеног на основу пређеног пута, *брзински модел* полази од претпоставке да се трансляторном и угаоном брзином мобилног робота може директно управљати сетом команди које је могуће задати мобилном роботу преко управљачког софтвера, а које мобилни робот треба да спроведе: *forward\_velocity(numeric\_value, time\_duration)* или *angular\_velocity(numeric\_value,*

*time\_duration*). Наравно, сада је апсолутно оправдано формирати вектор управљања на следећи начин:

$$u(t) = \{v_t \ \omega_t\}^T \quad (1.12)$$

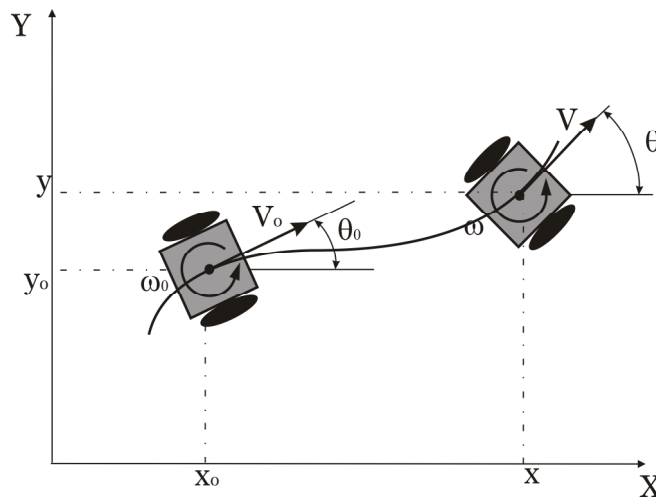
где су

$v_t$  - транслаторна брзина кретања центра маса,

$\omega_t$  - угаона брзина мобилног робота.

Кинематички модел, приказан на слици 1.3 (континуални облик), дат је преко:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{cases} = \begin{cases} x_0 + \frac{1}{2} \int_0^t (R_d \omega_d + R_l \omega_l) \cos(\theta(t)) dt \\ y_0 + \frac{1}{2} \int_0^t (R_d \omega_d + R_l \omega_l) \sin(\theta(t)) dt \\ \theta_0 + \frac{1}{d} \int_0^t (R_d \omega_d - R_l \omega_l) dt \end{cases} \quad (1.13)$$



**Слика 1.3**  
Кинематички модел  
(континуални облик)

где су:

$x_0$  -  $x$  координата тежишта мобилног робота у тренутку  $t=0$

$y_0$  -  $y$  координата тежишта мобилног робота у тренутку  $t=0$

$\theta_0$  - Угао ротације мобилног робота у тренутку  $t=0$

$R_l$  - Полупречник левог точка

- $R_d$  - Полупречник десног точка
- $\omega_d$  - Угаона брзина десног точка
- $\omega_l$  - Угаона брзина левог точка
- $d$  - Размак између точкова

Даље је основни кинематички модел дат у дискретном облику:

$$\begin{cases} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{cases} = \begin{bmatrix} x(k) + v(k)\Delta t \cos(\theta(k) + \omega(k)\Delta t) \\ y(k) + v(k)\Delta t \sin(\theta(k) + \omega(k)\Delta t) \\ \theta(k) + \omega(k)\Delta t \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

где су

- $x(k)$  -  $x$  координата мобилног робота у тренутку  $k$
- $y(k)$  -  $y$  координата мобилног робота у тренутку  $k$
- $\theta(k)$  - Угао ротације мобилног робота у тренутку  $k$
- $\omega(k) = \frac{(R_d \omega_d - R_l \omega_l)}{d}$
- $d$  - Размак између точкова
- $\Delta \theta = \omega(k)\Delta t$  прираштај угла  $\theta$
- $R_l$  - Полупречник левог точка
- $R_d$  - Полупречник десног точка
- $\omega_d$  - Угаона брзина десног точка
- $\omega_l$  - Угаона брзина левог точка

С обзиром да је овај модел дискретан модел кретања, као и претходни, ознаке за временске тренутке  $k+1$  и  $k$  су идентички једнаке временским тренутцима  $t+1$  и  $t$  респективно. Коришћењем слике 1.3 могуће је успоставити основне везе неопходне за извођење горњих релација. Важно је напоменути да  $\Delta t$  представља временски интервал трајања кретања из положаја  $k$  у положај  $k+1$ . Све претходне релације се веома лако изводе коришћењем основа кинематике крутог тела.

### 1.3 Дискусија

На основу једначина модела кретања изведених на основу пређеног пута и модела на основу брзина кретања мобилног робота могуће је изразити и дефинисати нелинеарну функцију  $g(u_t, x_{t-1})$  која врши пресликавање вектора управљања (табела 1.1) и вектора претходног стања система (простор стања система у тренутку  $t$ ) у простор стања система у тренутку  $t+1$ . Помоћу ове функције, након линеаризације Тејлоровим редом и срачунате Јакобијан матрице трансформације у сваком тренутку  $t$ , могуће је применити једначине Линеаризованог Калмановог филтера.

Оба модела кретања полазе од основних кинематичких поставки крутог тела у равни (три степена слободе), након чега следи увођење оних компоненти које су у реалним условима подложне генерисању грешке.

**Табела 1.1**  
Поређење модела кретања

<i>Модел промене стања (Модел кретања)</i>	<i>Компоненте вектора управљања <math>u(t)</math></i>
Одометрија	$u(t) = \{\Delta s_d \ \Delta s_l\}^T$
Брзински модел	$u(t) = \{v_t \ \omega_t\}^T$

Приказани модели кретања мобилног робота који своје кретање остварује помоћу тачкова нису и једини који постоје. Наиме, могуће је дефинисати знатно више (ако не и бесконачно) модела кретања мобилних робота али су за потребе овог курса приказана два модела који се и највише примењују. Оба модела су изведена на основу *кинематичке формулације кретања* чиме се модел(и) знатно поједностављују. Међутим, изучавање кретања без утицаја сила, како дисипативних тако и погонских, није потпуно реалан модел кретања, али се за мобилне роботе који бораве у затвореном простору (канцеларије, болнице, универзитетски комплекси итд.) ова апроксимација може усвојити. У таквим срединама динамика мора бити разматрана у поступку локализације мобилног робота. "Екстраполација" кинематичких пробабилистичких модела на динамичке моделе је аналогна оригиналној формулацији кинематичких модела, односно након постављања основног модела, накнадно се додају стохастичке компоненте у циљу што бољег моделирања и сагледавања система мобилног робота и утицаја реалног окружења.

Као што се из претходног може закључити, *општи алгоритам* који би дефинисао начин и смернице избора (кинематички или динамички) пробабилистички модел кретања, да ли усвојити брзински или модел на основу пређеног пута, итд. *не постоји*, и једина препорука која се може дати је да се модели кретања изводе у зависности од основних карактеристика мобилног робота али и карактеристика окружења у коме ће се робот кретати.