Универзитет у Београду – Машински факултет
Дипломске академске студије – 2. година (трећи семестар)
Шк. год. 2009/2010
Модул: Производно машинство
Предмет: Интелигентни технолошки системи (ПРО220-0131)
Предметни наставници:
Проф. др Зоран Миљковић и проф. др Бојан Бабић

ПА-1: Интелигентни системи и мобилни роботи

Предметни сарадници:
мр Божица Бојовић и Најдан Вуковић, дипл. инж. маш.

Резиме

- Увод у теорију вероватноће
- Модел кретања мобилног робота
- Сензорски модел (модел перцепције)
- Одређивање положаја мобилног робота (позиција+оријентација)
- Калманов филтер/филтар

Теорија вероватноће - увод

Вероватноћа – основни појам:

$$P(A) = \frac{\#\, pojavljvanja\ A}{ukupan\, \#\, ishoda}$$

Аксиоми теорије вероватноће:

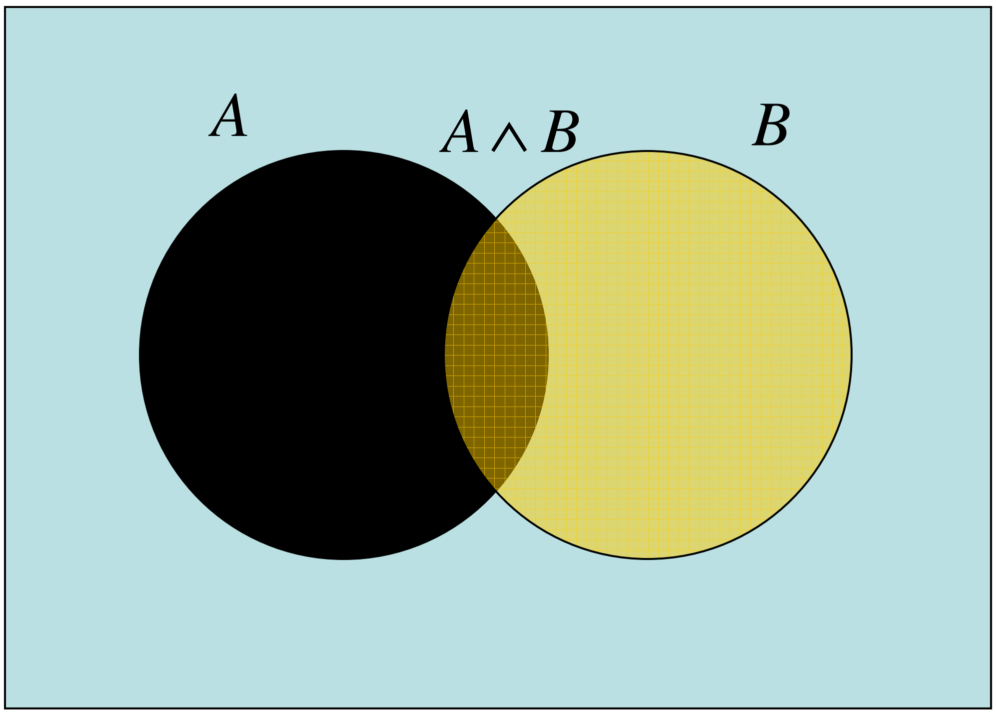
$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(uspeh) = 1 \qquad P(neuspeh) = 0$$

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Трећи аксиом

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$



Примена аксиома

$$
\begin{aligned}
P(A \vee \neg A) &= P(A) + P(\neg A) - P(A \wedge \neg A) \\
P(uspeh) &= P(A) + P(\neg A) - P(neuspeh) \\
1 &= P(A) + P(\neg A) - 0 \\
P(\neg A) &= 1 - P(A)
\end{aligned}
$$

Дискретне случајне промењљиве

- Нека је X случајна промењљива.
- Која може узети вредности из пребројивог скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- $P(X=x_i)$ или $P(x_i)$, представља вероватноћу да случајна промењљива X „узима” вредност x_i.
- $P(\ )$ представља функцију расподеле

Непрекидне случајне промењљиве

- *X je* непрекидна случајна промењљива.
- *p(X=x)* или *p(x)*, представља густину расподеле.
- P(X) је функција расподеле случајне промењљиве *X*

$$P(x \in (a,b)) = \int_a^b p(x)dx$$

Функције расподеле две промењљиве

- $P(X{=}x \text{ i } Y{=}y) = P(x,y)$

- Ако су X и Y независне, важи:

$$P(x,y) = P(x)\, P(y)$$

- $P(x \mid y)$ представља расподелу промењљиве x за познато y *(условна расподела)*

$$P(x \mid y) = P(x,y) / P(y)$$

$$P(x,y) = P(x \mid y)\, P(y)$$

- Ако X не зависи од Y онда је

$$P(x \mid y) = P(x)$$

Тотална вероватноћа

- Дискретна СП

Непрекидна СП

$$\sum_x P(x) = 1$$

$$\int p(x)\, dx = 1$$

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$p(x) = \int p(x, y)\, dy$$

$$P(x) = \sum_y P(x \mid y) P(y)$$

$$p(x) = \int p(x \mid y)\, p(y)\, dy$$

Гаусова („нормална”) расподела

$$p(x) \sim N(\mu, \sigma^2):$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Промењљива x je

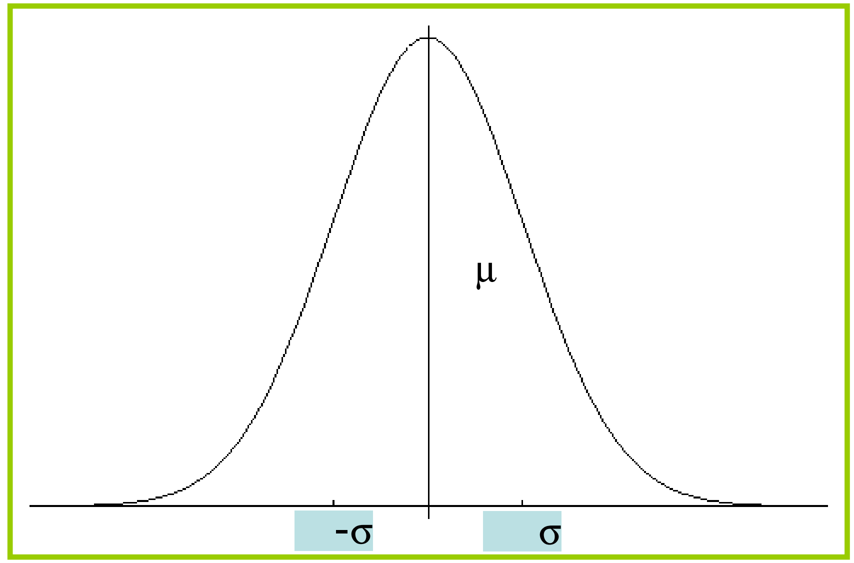
скалар – 1D

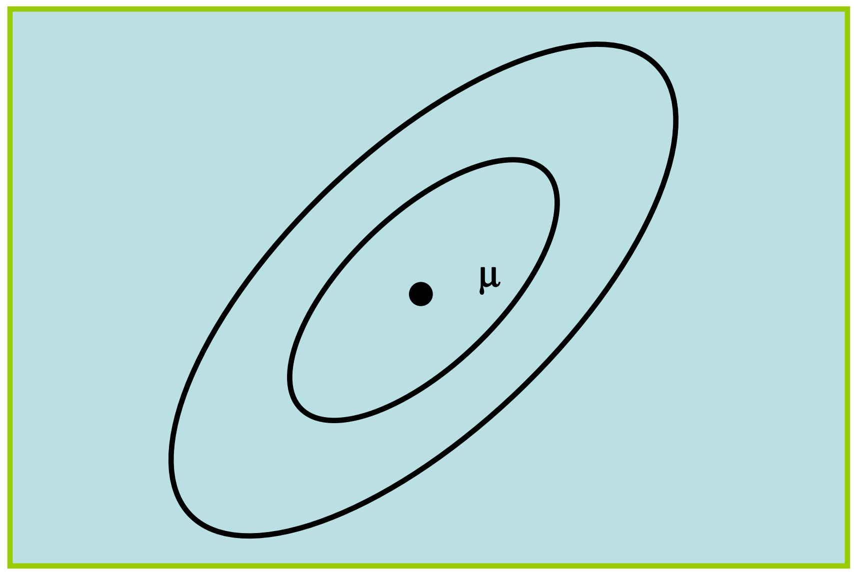
$$p(\mathbf{x}) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}):$$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Промењљива x je

вектор - dD





Нека особине Гаусове расподеле

Скаларна случајна промењљива:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ Y = aX + b \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^{\ 2}) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^{\ 2}) \end{array}\right\} \Rightarrow p(X_1) \cdot p(X_2) \sim N\left(\frac{\sigma_2^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2}} \mu_1 + \frac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2}} \mu_2, \quad \frac{1}{\sigma_1^{\ -2} + \sigma_2^{\ -2}} \right)$$

Векторска случајна промењљива:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu, \Sigma) \\ Y = AX + B \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \end{array}\right\} \Rightarrow p(X_1) \cdot p(X_2) \sim N\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2} \mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2} \mu_2, \quad \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}} \right)$$

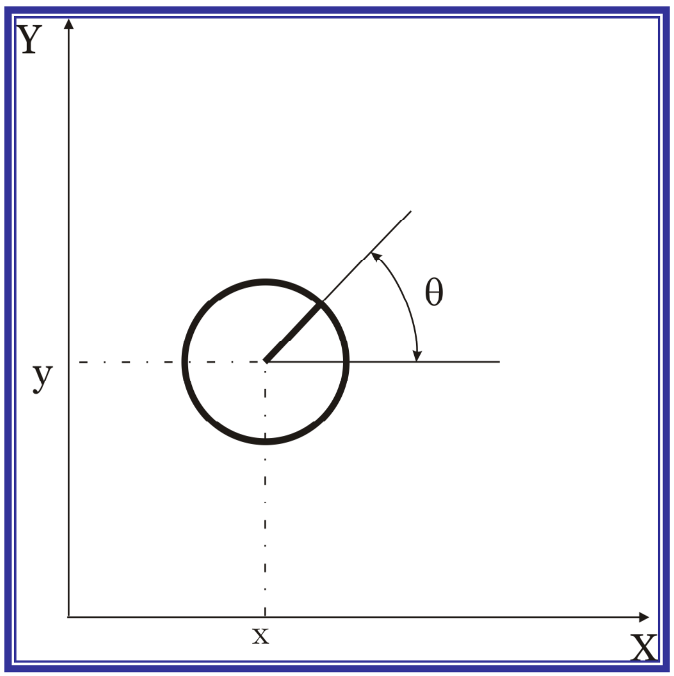
Мобилни роботи

Модел кретања и опсервациони модел

Модел кретања

- Вектор стања x_t

$$x_t = (x, y, z, \theta, \psi, \varphi)^T$$



• *x, y* и *z* – компоненте вектора које дефинишу позицију мобилног робота, а *θ*, *ψ* и *φ* су углови који одређују оријентацију мобилног робота;

• Вектор стања се може и проширити са брзинама и убрзањима...

• За раванско кретање...

$$x_t = \{x, y, \theta\}^T$$

... три степена слободе.

Модели кретања

- *Модел кретања на основу брзина* (*velocity based motion model*)
  - у овом моделу транслаторна и угаона брзина кретања мобилног робота представљају *управљања u(t)* која одређују промену позиције и оријентације током експлоатације.

- *Модел кретања на основу пређеног пута* (*odometry*)
  - у овом моделу *управљање u(t)* је дефинисано пређеним путем точкова мобилног робота током тачно дефинисаног временског интервала.

Модел кретања на основу пређеног пута

- Пређени пут се мери помоћу енкодера од неког положаја у коме је мобилни робот био у тренутку *t-1* до неког положаја у тренутку *t*;
- *Differential Drive Mobile Robots*, два независна погонска точка;
- Управљањем смером обртања точкова контролише се скретање мобилног робота;
- На „осовинама” точкова се налазе енкодери који мере углове ротације (обртање точкова).

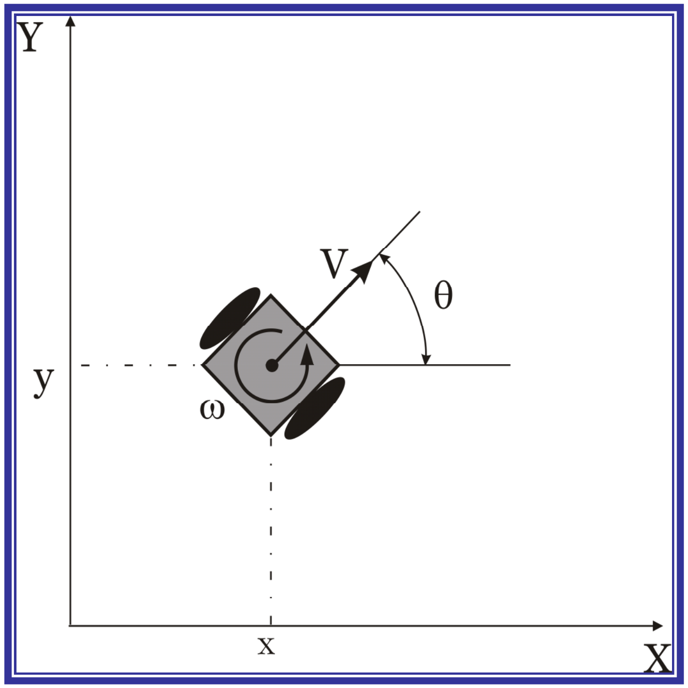
Модел кретања на основу пређеног пута

$$x' = \{x \quad y \quad \theta\}^T$$

$$\Delta x = \Delta s \cos(\theta + \Delta\theta / 2)$$

$$\Delta y = \Delta s \sin(\theta + \Delta\theta / 2)$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{b} \qquad \Delta s = \frac{\Delta s_d + \Delta s_l}{2}$$



$(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta)$ - величине које одређују прираштај;

$(\Delta s_d, \Delta s_l)$ - пређени пут десног и левог погонског точка респективно;

b - растојање између точкова.

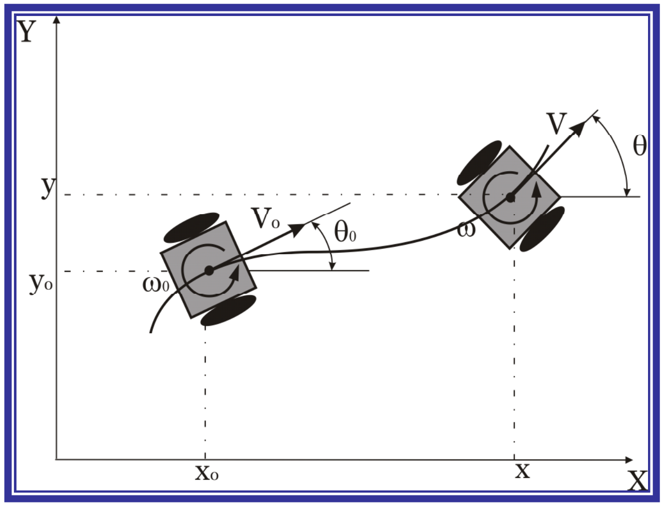
Модел кретања на основу пређеног пута

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta s \cos(\theta + \Delta\theta / 2) \\ \Delta s \sin(\theta + \Delta\theta / 2) \\ \Delta\theta \end{bmatrix}$$

... односно...

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta s_d + \Delta s_l}{2} \cos(\theta + \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{2b}) \\ \frac{\Delta s_d + \Delta s_l}{2} \sin(\theta + \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{2b}) \\ \frac{\Delta s_d - \Delta s_l}{2b} \end{bmatrix} \Rightarrow x' = f(x, y, \theta, \Delta s_d, \Delta s_l)$$

„Брзински“ модел кретања мобилног робота



- Вектор управљања: $u(t) = \{v_t \quad \omega_t\}^T$
- Транслаторна брзина кретања центра маса и угаона брзина мобилног робота;
- Кинематички модел кретања у континуалном облику:

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \frac{1}{2}\int_0^t (R_d\omega_d + R_l\omega_l)\cos(\theta(t))dt \\ y_0 + \frac{1}{2}\int_0^t (R_d\omega_d + R_l\omega_l)\sin(\theta(t))dt \\ \theta_0 + \frac{1}{d}\int_0^t (R_d\omega_d - R_l\omega_l)dt \end{bmatrix}$$

x_0 - x координата тежишта мобилног робота у тренутку $t=0$

y_0 - y координата тежишта мобилног робота у тренутку $t=0$

θ_0 - Угао ротације мобилног робота у тренутку $t=0$

R_l - Полупречник левог точка

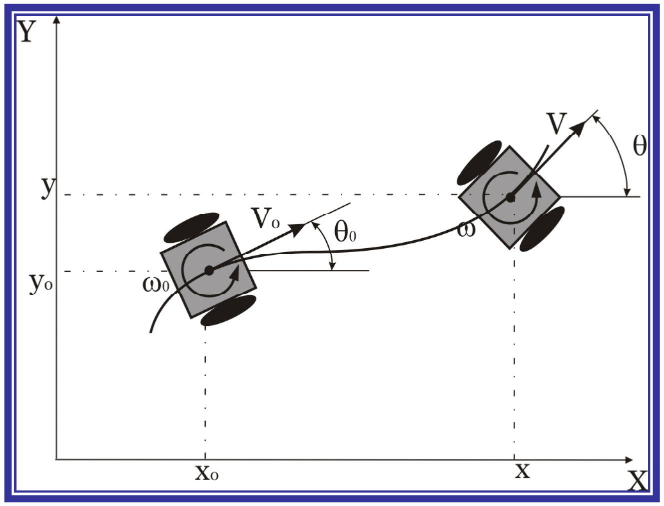
R_d - Полупречник десног точка

ω_d - Угаона брзина десног точка

ω_l - Угаона брзина левог точка

b - Растојање између точкова

„Брзински" модел кретања мобилног робота



- Кинематички модел кретања у дискретном облику:

$$\begin{Bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k)+v(k)\Delta t\cos(\theta(k)+\omega(k)\Delta t) \\ y(k)+v(k)\Delta t\sin(\theta(k)+\omega(k)\Delta t) \\ \theta(k)+\omega(k)\Delta t \end{bmatrix}$$

x(k) - *x* координата тежишта мобилног робота у тренутку *k*

y(k) - *y* координата тежишта мобилног робота у тренутку *k*

θ(k) - Угао ротације мобилног робота у тренутку *k*

R_l - Полупречник левог точка

R_d - Полупречник десног точка

$\omega_d(k)$ - Угаона брзина десног точка

$\omega_l(k)$ - Угаона брзина левог точка

d - Растојање између точкова

$$\omega = \frac{(R_d\omega_d - R_l\omega_l)}{d}$$

Модел перцепције

- Сензори представљају подсистеме помоћу којих се врши пријем информације из окружења;
- Након инерпретације ових информација мобилни робот „доноси одлуку” о следећој акцији, покрету или путањи;
- Концепти као што су *интелигентан*, а посебно *аутономан*, почивају управо на тумачењу сензорских информација и накнадном генерисању одговарајућих акција.

Основне поделе сензора

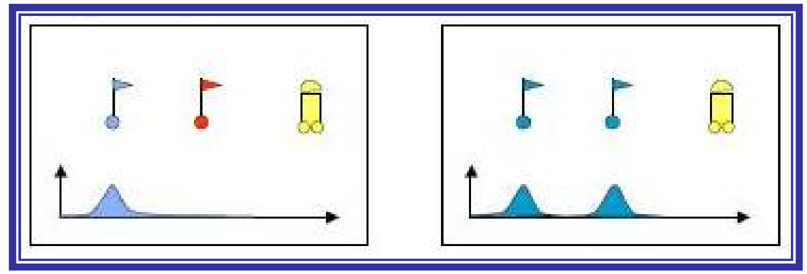
У односу на физичке величине које је потребно идентификовати сензори се деле на:

- *Унутрашње* – сензори који мере величине унутар самог мобилног робота (број обртаја електро мотора, енергетске резерве итд.)
- *Спољашње* – мере величине у односу на окружење у коме се мобилни робот креће (тактилни сензори итд.)

У односу на енергетски утицај окружења на систем и обрнуто:

- *Пасивне сензоре* – врше мерење енергетског утицаја окружења на систем мобилног робота (микрофони, камере)
- *Активне сензоре* – емитују енергију у окружење и врше мерење одговора окружења на енергетски стимуланс (нпр. ласерски и ултразвучни сензори)

Модел перцепције базиран на идентификацији карактеристичних објеката



- Основна идеја:

  1. Одредити *растојање* и *оријентацију* објекта у односу на робота;

$$f(z_t)=\{f_t^1, f_t^2, \dots f_t^n\}=\{\begin{bmatrix} r_t^1 \\ \phi_t^1 \\ s_t^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r_t^2 \\ \phi_t^2 \\ s_t^2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} r_t^n \\ \phi_t^n \\ s_t^n \end{bmatrix}\}$$

  2. Робот може да идентификује класу карактеристичних објеката (*features,* енг.) помоћу величине која се назива *параметар идентификације* s^n (скаларна или векторска величина).

$$\begin{pmatrix} r_t^n \\ \phi_t^n \\ s_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{jx}-x)^2+(m_{jy}-y)^2} \\ a\tan 2(m_{jy}-y, m_{jx}-x)-\theta \\ s_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{\sigma_r^2} \\ \varepsilon_{\sigma_\phi^2} \\ \varepsilon_{\sigma_s^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{atan2}(y,x) = \begin{cases} \text{atan}(y/x) & \text{if } x>0 \\ \text{sign}(y)\,(\pi-\text{atan}(|y/x|)) & \text{if } x<0 \\ 0 & \text{if } x=y=0 \\ \text{sign}(y)\,\pi/2 & \text{if } x=0, y\neq 0 \end{cases}$$

Величине $\varepsilon_{\sigma_r^2}$ $\varepsilon_{,\sigma_\phi^2}$ $\varepsilon_{\sigma_s^2}$ су моделиране нормалном расподелом са познатим варијансама и нултим очекиваним вредностима.

Калманов филтер

- *Филтрација* - процес одређивања удела сигнала $x_1(t)$ и шума $x_2(t)$ у сензорској информацији $y(t)=x_1(t) + x_2(t)$.

- *Предикција* - сврха процеса предикције је да се на основу свих информација прикупљених до тренутка t направи што боље предвиђање стања система у тренутку t_1.

- *Интерполација* - основни циљ процеса интерполације је прикупљање што више валидних информација о неком процесу или систему.

- Филтрација => филтар => *Калманов филтар*

- Filtering => filter => *Kalman filter*

Калманов филтер – основна формулација

R. E. Kalman, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering* **82**, 35-45 (1960).

Једначина стања система:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) = N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, R_t\right)$$

x_t – вектор стања система у тренутку *t;*

x_{t-1} - вектор стања система у тренутку *t-1*

...„нормална" (Гаусова) расподела...

Једначина мерења (опсервациони модел):

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

$$p(z_t \mid x_t) = N\left(z_t; C_t x_t, Q_t\right)$$

x_t – вектор стања система у тренутку *t;*

z_t - вектор мерења у тренутку *t;*

Дефинисање основних величина Калмановог филтера

A_t Матрица типа (*nxn*) која одређује како систем од тренутка *t* „долази” до *t-1* без утицаја управљања или шумова.

B_t Матрица (*nxl*) која одређује како управљања u_t мењају стање система од *t* to *t-1*.

C_t Матрица (*kxn*) дефинише пресликавање x_t у мерење z_t.

ε_t

δ_t

Случајне промењљиве које представљају шумове (поремећаје) у једначини стања и једначини мерења. Оне су независне и подлежу „нормалној” расподели са познатим матрицама коваријанси R_t и Q_t респективно.

Калманов филтер - алгоритам

$$bel(x_0) = N(x_0; \mu_0, \Sigma_0)$$

- почетно стање система;

... *bel* = *belief* ...

$$bel(x_t) = N(x_t; \mu_t, \Sigma_t)$$

- стање система у тренутку *t*.

1. $ALGORITAM \quad Kalmanov\_filter(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t)$
2. $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
3. $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$
4. $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$
5. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$
6. $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$
7. $return \ \mu_t, \Sigma_t$

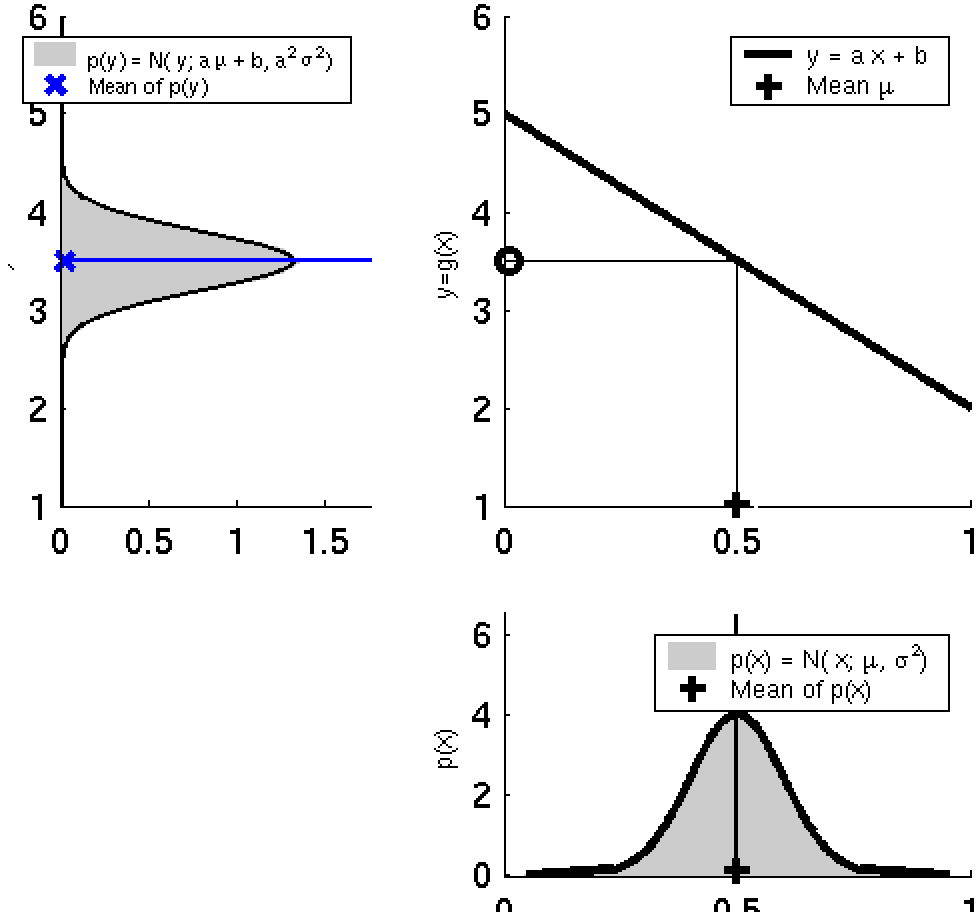
Предикција

(*prediction*, *time update*)

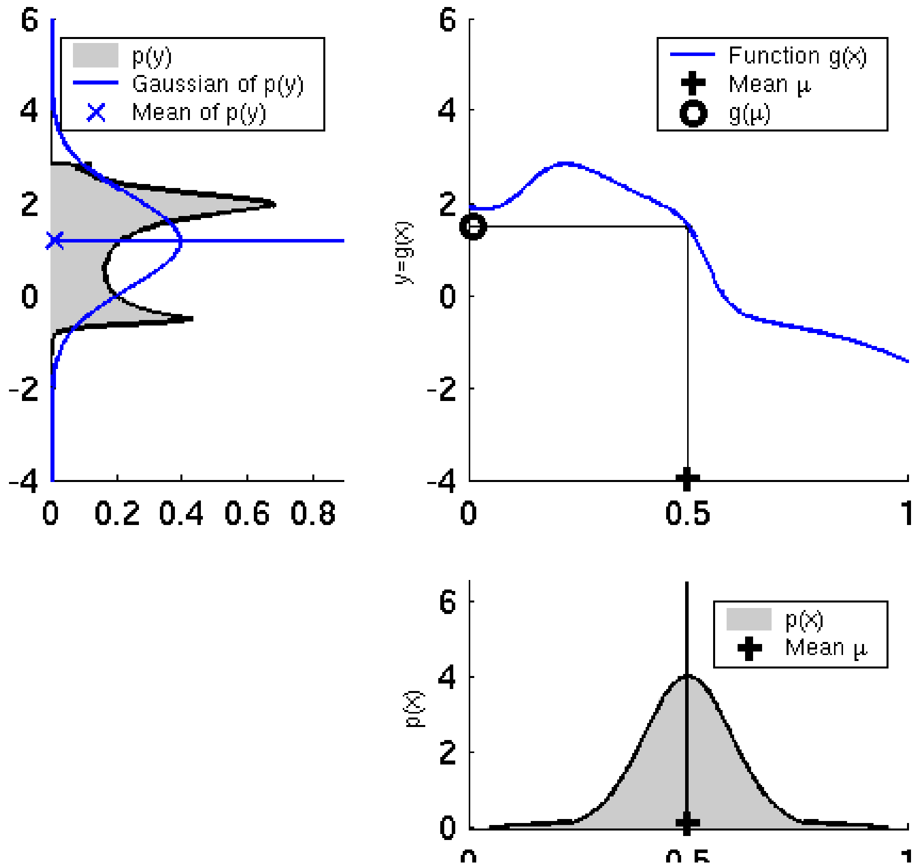
Корекција

(*update*, *correction*, *measurement update*)

Анализа

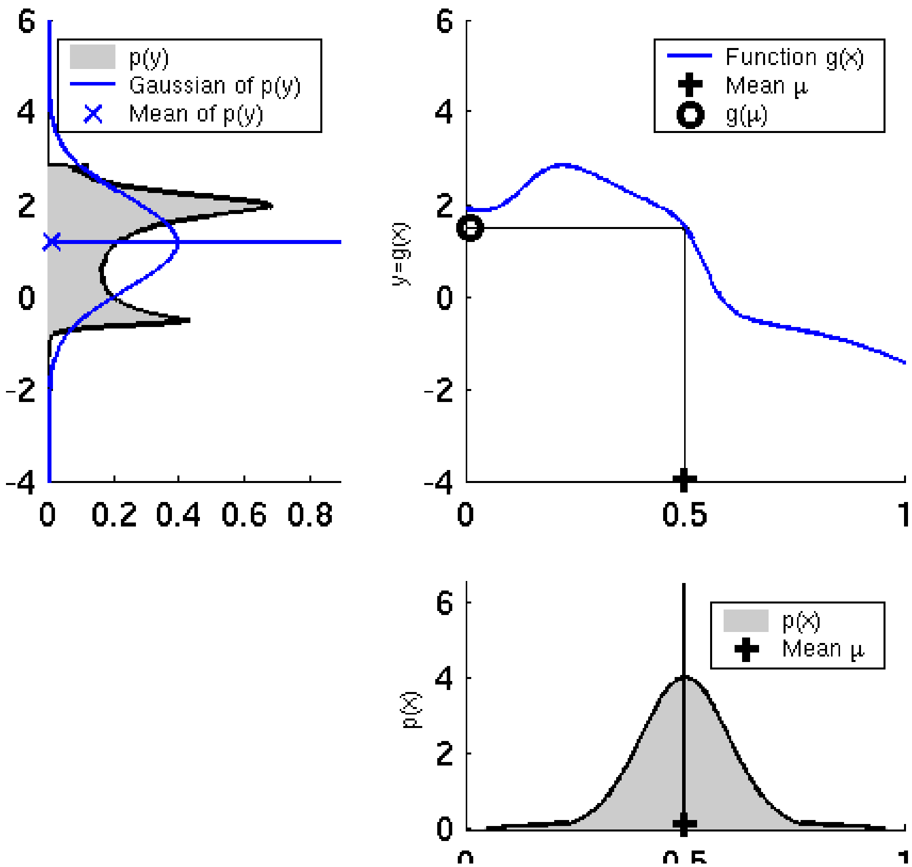


Анализа



p(y)
Gaussian of p(y)
Mean of p(y)
Function g(x)
Mean μ
g(μ)
y=g(x)
p(x)
Mean μ
p(x)

Шта ако систем није линеаран?



- **Једначина стања нелинеарна функција** управљања и претходног стања:

$$x_t = g(u_t, x_{t-1})$$

- **Опсервациони модел нелинеарна функција** стања система:

$$z_t = h(x_t)$$

- Густина расподеле одређена на бази КФ не одговара реалном стању.

Линеаризовани Калманов филтер

- Развијањем у **Тејлоров ред** модела система и модела перцепције:

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \ (x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$h(x_t) \approx h(\overline{\mu}_t) + \frac{\partial h(\overline{\mu}_t)}{\partial x_t} (x_t - \overline{\mu}_t)$$

$$h(x_t) \approx h(\overline{\mu}_t) + H_t \ (x_t - \overline{\mu}_t)$$

ЛКФ - алгоритам

$$bel(x_0) = N\left(x_0; \mu_0, \Sigma_0\right)$$

- почетно стање система;

$$bel(x_t) = N\left(x_t; \mu_t, \Sigma_t\right)$$

- стање система у тренутку *t*.

1. $ALGORITAM$
$Linearizovani\_Kalmanov\_filter(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t);$
2. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$
3. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$
4. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$
5. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$
6. $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$
7. $return\ \mu_t, \Sigma_t$

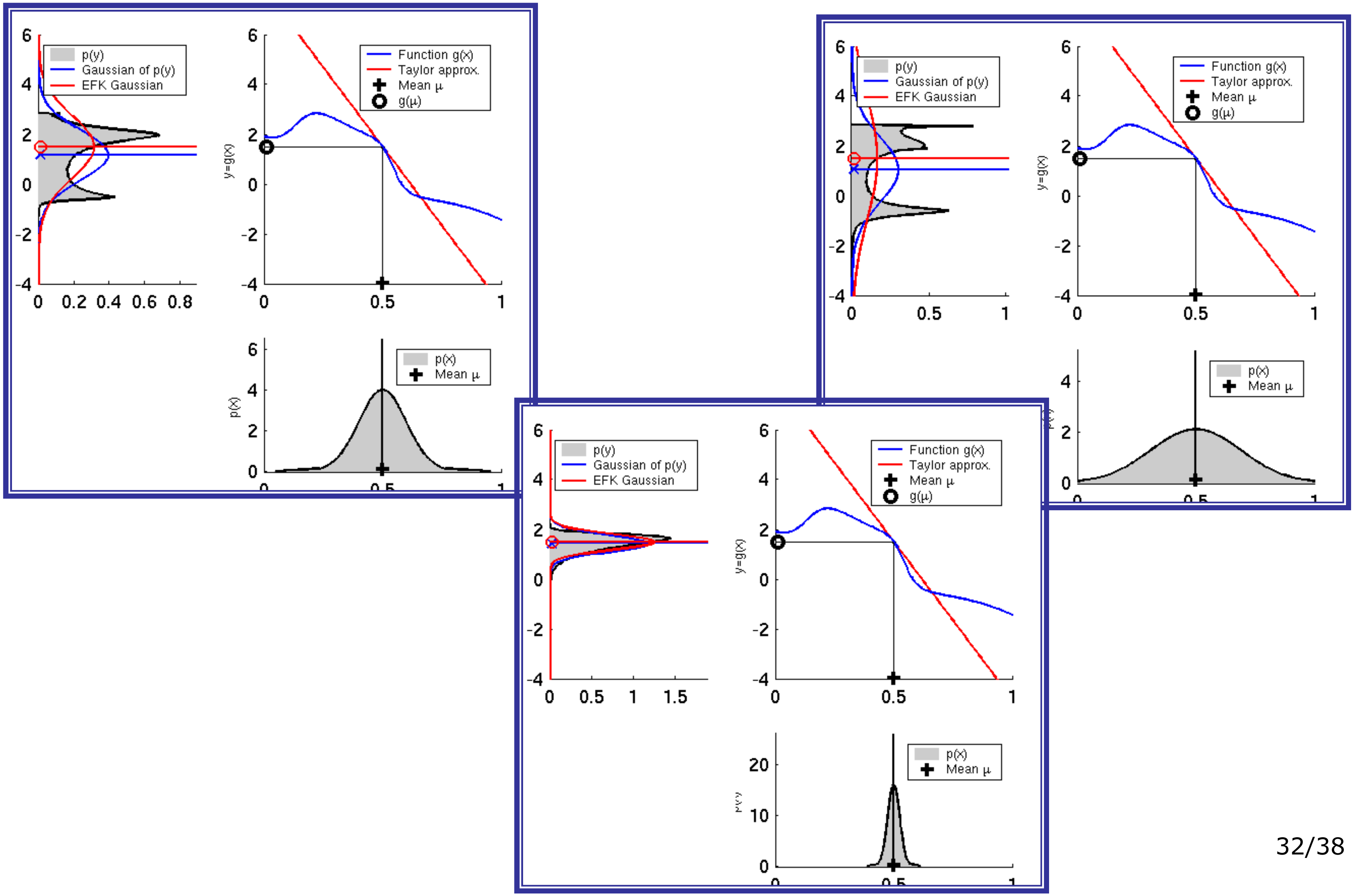
Предикција

(*prediction, time update*)

Корекција

(*update, correction, measurement update*)

Анализа



p(y)
Gaussian of p(y)
EFK Gaussian
Function g(x)
Taylor approx.
Mean μ
g(μ)
y=g(x)
p(x)
Mean μ

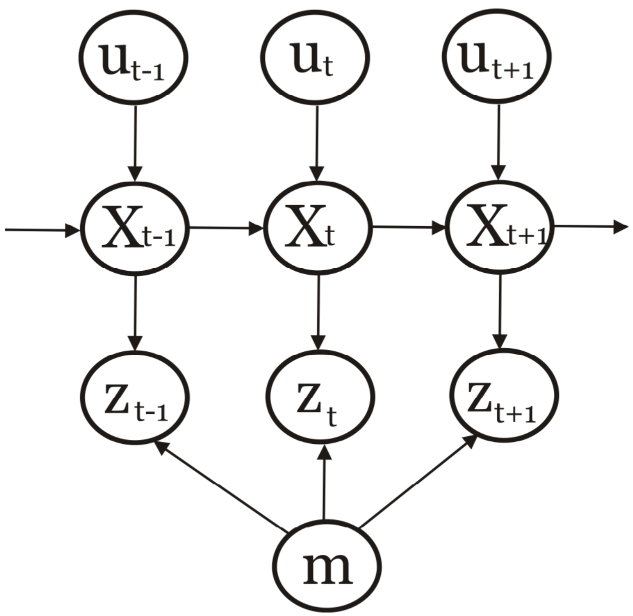
КФ и ЛКФ

Упоредни приказ основних карактеристика КФ-а и ЛКФ-а:

	Калманов филтер	*Линеаризовани Калманов филтер*
1. Предикција стања	$A_t\mu_{t-1} + B_t u_t$	$g(\mu_{t-1}, u_t)$
2. Предикција мерења	$C_t \overline{\mu}_t$	$h(\overline{\mu}_t)$
3. Калманово појачање	$K_t = \overline{\Sigma}_t C_t^T (C_t \overline{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$	$K_t = \overline{\Sigma}_t H_t^T (H_t \overline{\Sigma}_{t-1} H_t^T + Q_t)^{-1}$
4. Очекивана вредност расподеле	$\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \overline{\mu}_t)$	$\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - h(\overline{\mu}_t))$
5. Матрица коваријанси	$\Sigma_t = (I - K_t C_t)\overline{\Sigma}_t$	$\Sigma_t = (I - K_t H_t)\overline{\Sigma}_t$

Локализација

- *Одређивање позиције и оријентације мобилног робота у односу на мапу окружења*



Претпоставке: мапа окружења *апсолутно тачна* и да се на њој налази положај *свих непомичних објеката* који се могу наћи у окружењу;

Основна подела:

- *Локална локализација* – почетни положај робота је познат. Вектор стања подлеже Гаусовој расподели;

- *Глобална локализација* – почетни положај робота није познат. Усваја се да вектор стања x_t подлеже униформној расподели;

Локализација

Посматрано са становишта управљања мобилним роботом, локализацију можемо поделити на:

- *Активну* – алгоритми локализације имају потпуну контролу над основним алгоритмом управљања мобилним роботом;
- *Пасивна* –подсистем за локализацију мобилног робота представља само један подсистем система управљања и има само једну намену: одређивање позиције и оријентације мобилног робота, док главни систем надгледа функционисање и извршење постављеног задатка;

Окружење у коме се робот креће може бити класификовано као:

- *Статичко окружење* – то је оно окружење у коме се једино мобилни робот креће;
- *Динамичко окружење* – је оно окружење у коме поред мобилног робота и остали објекти могу мењати положај током времена.

1. **ЛКФ_локализација** ($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t, m$):

Корак предикције:

2. $$G_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \mu_{t-1,x}} & \frac{\partial x'}{\partial \mu_{t-1,y}} & \frac{\partial x'}{\partial \mu_{t-1,\theta}} \\ \frac{\partial y'}{\partial \mu_{t-1,x}} & \frac{\partial y'}{\partial \mu_{t-1,y}} & \frac{\partial y'}{\partial \mu_{t-1,\theta}} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial \mu_{t-1,x}} & \frac{\partial \theta'}{\partial \mu_{t-1,y}} & \frac{\partial \theta'}{\partial \mu_{t-1,\theta}} \end{pmatrix}$$ Јакобијан функције *g* у односу на положај робота

3. $$V_t = \frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial u_t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial v_t} & \frac{\partial x'}{\partial \omega_t} \\ \frac{\partial y'}{\partial v_t} & \frac{\partial y'}{\partial \omega_t} \\ \frac{\partial \theta'}{\partial v_t} & \frac{\partial \theta'}{\partial \omega_t} \end{pmatrix}$$ Јакобијан функције *g* у односу на управљање

4. $$M_t = \begin{pmatrix} (\alpha_1 |v_t| + \alpha_2 |\omega_t|)^2 & 0 \\ 0 & (\alpha_3 |v_t| + \alpha_4 |\omega_t|)^2 \end{pmatrix}$$ Шум (грешка) управљања

5. $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$ Предвиђена очекивана вредност

6. $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + V_t M_t V_t^T$ Предвиђена матрица коваријанси

1. **ЛКФ_локализација** (μ_{t-1}, Σ_{t-1}, u_t, z_t, m):

Корак корекције:

2. $\hat{z}_t = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_x - \bar{\mu}_{t,x})^2 + (m_y - \bar{\mu}_{t,y})^2} \\ \operatorname{atan2}(m_y - \bar{\mu}_{t,y}, m_x - \bar{\mu}_{t,x}) - \bar{\mu}_{t,\theta} \end{pmatrix}$ Предвиђена очекивана вредност мерења

3. $H_t = \dfrac{\partial h(\bar{\mu}_t, m)}{\partial x_t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_t}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \dfrac{\partial r_t}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \dfrac{\partial r_t}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \\ \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial \bar{\mu}_{t,x}} & \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial \bar{\mu}_{t,y}} & \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial \bar{\mu}_{t,\theta}} \end{pmatrix}$ Јакобијан функције *h* у односу на положај

4. $Q_t = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{pmatrix}$ Шум мерења

5. $S_t = H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t$ Предвиђена матрица варијанси мерења

6. $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T S_t^{-1}$ Калманово појачање

7. $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - \hat{z}_t)$ **Нова очекивана вредност**

8. $\Sigma_t = (I - K_t H_t)\bar{\Sigma}_t$ **Нова матрица коваријанси**

Хвала на пажњи!

<u>Питања?</u>

Поједини делови су преузети са званичних презентација књиге:
S. Thrun, W. Burgard, D. Fox, *Probabilistic Robotics*, MIT Press 2005.