1. Прилог А

Основе теорије вероватноће

Основни појмови теорије вероватноће су *експеримент* и *исходи (резултати)*. Најпознатији пример којим се уводе појмови и концепти теорије вероватноће је бацање новчића и накнадно одређивање (предвиђање) на коју ће страну пасти ("глава" или "писмо").

Један од основних концепата теорије вероватноће је *случајни догађај*. Случајни или *стохастички* догађај је онај догађај који није предвидљив зато што је и сам последица великог броја узрока. Претпоставља се да и узроци случајног догађаја имају случајан карактер.

Скуп свих елементарних догађаја називамо *простор елементарних догађаја*. Простор елементарних догађаја је *дискретан* ако је број његових елемената коначан, а у случају да је број елемената бесконачан онда се такав простор назива *континуалан*.

Квантитативна оцена могућности појаве случајног догађаја представља *вероватноћу* неког догађаја. Нека X буде нека произвољна случајна променљива, и нека је x одређена вредност коју X може да има. У том случају, за исход догађаја можемо написати:

$$p(X=x) \tag{A.1}$$

У стандардном примеру са бацањем новчића важи:

$$p(X=glava)=0.5 \text{ и } p(X=pismo)=0.5 \tag{A.2}$$

Уобичајено је, ради једноставнијег записивања, да се у ознаци за вероватноћу догађаја не узима симбол случајне променљиве већ само њена могућа вредност, симболички, односно:

$$p(x) \tag{A.3}$$

У општем случају, након N извршених бацања новчића, вероватноћа појављивања једнака је лимесу *релативне фреквенције* догађаја, односно:

$$p(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{N(x)}{N} \tag{A.4}$$

Из релације (A.4) није тешко закључити да се вероватноћа неког догађаја креће у границама:

$$0 \leq p(x) \leq 1 \tag{A.5}$$

На основу претходних ставова могу се увести три аксиома теорије вероватноће:

1. Вероватноћа неког догађај је *увек ненегативна* величина:

$$p(x) \geq 0 \tag{A.6}$$

2. Вероватноћа неког догађаја има вредност 1 ако ће се поменути догађај сигурно одиграти:

$$p(x) = 1 \tag{A.7}$$

и вредност 0 ако не постоји вероватноћа одигравања догађаја:

$$p(x) = 0 \tag{A.8}$$

3. За два догађаја који се међусобно искључују важи својство адитивности:

$$p(A \cup B) = p(A + B) = p(A) + p(B) \tag{A.9}$$

односно у општем случају:

$$p(A \cup B) = p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A \bigcap B) \tag{A.10}$$

Концепт вероватноће може бити примењен и на две промењљиве X и Y:

$$p(x, y) = p(X = x \ i \ Y = y) \tag{A.11}$$

Ако су величине X и Y *независне* важи следеће својство:

$$p(x, y) = p(x)\, p(y) \tag{A.12}$$

Условна вероватноћа неког догађаја је:

$$p(x \mid y) = p(X = x \mid Y = y) \tag{A.13}$$

Релација (A.13) нам омогућава да одредимо случајну промењљиву X ако је величина Y позната. Условна вероватноћа неког догађаја је тада:

$$p(x \mid y) = \frac{p(x)\, p(y)}{p(y)} = p(x) \tag{A.14}$$

што значи да ако су две величине независне онда нам величина Y неће пружити додатну информацију о промењљивој X.

Међутим, уколико су две величине зависне, онда сходно Бајесовом правилу можемо одредити промењљиву X на следећи начин:

$$p(x \mid y) = \frac{p(y \mid x)\, p(x)}{p(y)} \tag{A.15}$$

Бајесово правило може бити и проширено:

$$\begin{aligned} p(x \mid y, z) &= \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} = \frac{p(y \mid x, z)\, p(x, z)}{p(y \mid z)\, p(z)} = \\ &= \frac{p(y \mid x, z)\, p(x \mid z)\, p(z)}{p(y \mid z)\, p(z)} = \frac{p(y \mid x, z)\, p(x \mid z)}{p(y \mid z)} \end{aligned} \tag{A.16}$$

Бајесово правило може бити изведено и у рекурзивној форми:

$$p(x \mid z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n) = \frac{p(z_n \mid x, z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{n-1})\, p(x \mid z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{n-1})}{p(z_n \mid z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{n-1})} \tag{A.17}$$

Одакле се увођењем претпоставке Маркова о независности величине z_n од $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_{n-1}$ ако знамо величину x претходна релација може значајно поједноставити.

Функцијом расподеле вероватноће скаларне континуалне случајне променљиве x у тачки $x = \xi$ називамо следећу граничну вредност:

$$p_\xi(x) = \lim_{d\xi \to 0} \frac{p(\xi - d\xi < x \le \xi)}{d\xi} \ge 0 \tag{A.18}$$

Сходно основним теоретским поставкам теорије вероватноће неопозиво следи:

$$p_\xi(+\infty) = 1\ , \quad p_\xi(-\infty) = 0 \tag{A.19}$$

Важи и:

$$p(x) = \frac{dp_\xi(x)}{d\xi} \tag{A.20}$$

Неке од основних функција расподеле вероватноће, као што су *равномерна, експоненцијална, Гаусова, Студентова* итд. са свим својим основним карактеристикама могу се наћи у литератури.

С обзиром да је већина модела шума (како мерења тако и управљања) апроксимирана Гаусовом (нормалном) расподелом, у наставку ће бити приказана основна математичка формулација поменуте расподеле (функције).
За скаларну променљиву Гаусова расподела је дата у следећем облику:

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\} \tag{A.21}$$

где су са μ и σ^2 обележене *очекивана вредност* и *варијанса*, респективно. Ове две величине једнозначно одређују функцију расподеле случајне промењљиве, односно, $\aleph(x;\mu,\sigma^2)$. У случају векторске случајне промењљиве, нормална расподела је:

$$p(x)=\det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\} \tag{A.22}$$

где су са μ и Σ обележене одговарајуће матрице очекиване вредности величине и матрице коваријанси. Важно је напоменути је μ вектор, а матрица коваријанси Σ позитивно-семидефинитна матрица (увек позитивна). Густина расподеле је на основу претходног једнозначно дефинисана као $\aleph(x;\mu,\Sigma)$.

Потребно је и математички дефинисати очекивану вредност μ расподеле и матрицу коваријанси Σ. Очекивана вредност μ се може дефинисати помоћу *оператора математичког очекивања*:

$$E[x]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx=\mu \tag{A.23}$$

док је варијанса за скаларну промењљиву дата као:

$$\mathrm{var}(x)=E[(x-\bar{x})^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2\,p(x)\,dx=E[x^2]-E[x]^2=\sigma^2 \tag{A.24}$$

Основне особине оператора математичког очекивања су:

1. *E[C] = C, C=const.*,
2. *E[Cx] = C E[x]*,
3. *E[x+y] = E[x] +E[y]*,
4. *E[Cxy] = C E[x] E[y]*,
5. *E[x^Ty] = 0* , ако су величине *x* и *y* независне.

2. Прилог Б

Линеарна алгебра

Б.1 Извод вектора и матричне функције

Нека је *f(x)* нека функција реалног или комплексног аргумента при чему је аргумент *x* вектор са *N* компоненти. Први извод функције *f(x)* је тада:

$$gradf = \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}} \tag{Б.1.1}$$

и назива се *градијент*. Елементи градијента дефинисани су на следећи начин:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{n}}}, 1 \leq n \leq N \tag{Б.1.2}$$

Други извод функције *f(x)* је матрица типа *N x N* која се назива *Хесијан*:

$$H(x) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}^2} \tag{Б.1.3}$$

са елементима који су дефинисани на следећи начин:

$$h_{nm}(x) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{n}} \partial x_m} \tag{Б.1.4}$$

Јакобијан матрица *N*-димензионе векторске функције **f(.)** одређује се сходно:

$$J(x) = \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}} \tag{Б.1.5}$$

где су елементи Јакобијан матрице

$$j_{nm}(x) = \frac{\partial \mathbf{f}_n(x)}{\partial x_m} \tag{Б.1.6}$$

Б.2 Квадратна форма и извод квадратне форме

За сваки вектор $x \in \Re^{nx1}$ и матрицу $A \in \Re^{n\,x\,n}$ скаларна функција дефинисана на следећи начин:

$$f(x) = x^T Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \qquad (Б.2.1)$$

назива се *квадратна форма*.
За квадратну форму се каже да је *позитивно дефинитна* када год је матрица A позитивно дефинитна матрица.

Основне особине квадратне форме одређују се помоћу матрице A.

Квадратна форма је:

- *Позитивно (негативно) дефинитна* ако и само ако је матрица $A>0$ $(A<0)$ за свако $x \neq 0$,
- *Позитивно (негативно) семи-дефинитна* ако и само ако је матрица $A \geq 0$ $(A \leq 0)$.

Нека је дата квадратна форма:

$$y = x^T Ax \qquad (Б.2.2)$$

где је матрица A квадратна матрица типа $N\,x\,N$. Први извод квадратне форме је:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Ax + A^T x \qquad (Б.2.3)$$

а уколико је матрица A симетрична израз се своди на:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2Ax \qquad (Б.2.4)$$

Други извод квадратне форме је у општем случају:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial x}) = A + A^T \qquad (Б.2.5)$$

Иначе, што у случају симетричне матрице A квадратне форме даје следећи резултат:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial y}{\partial x}) = 2A \qquad (Б.2.6)$$

У следећој табели су дата основна правила:

y	$\frac{\partial y}{\partial x}$
Ax	$\mathbf{A^T}$
$\mathbf{x^T A}$	**A**
$\mathbf{x^T x}$	**2x**
$\mathbf{x^T A x}$	$\mathbf{Ax+A^T x}$

Б.3 Извод сложене векторске функције

Потребно је одредити $\frac{\partial z}{\partial x}$ где је ***z*** функција векторског аргумента ***y*** који је даље функција векторског аргумента ***x***. Развијањем комплетног израза веома лако се доказује следећа једнакост:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^T \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^T \tag{Б.3.1}$$

Важно је нагласити да уколико је потребно да се одреди извод финкције ***w***, која је функција ***z***, која је функција ***y***, која је функција ***x***, онда следи:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{Б.3.2}$$

Б.4 Инверзна матрична лема – општи и специјални случај

Инверзија производа две или више матрица постоји и потпуно је математички дефинисана. С друге стране, у општем случају инверзија збира двеју или више матрица *не постоји*. Односно, $\mathbf{(A+B)^{-1}}$ може, али у општем случају не мора, да буде једнако збиру инверзија појединачних матрица **A** и**B**:

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} \tag{Б.4.1}$$

Шерман-Морисонова формула, гласи:

$$(A+CD^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(I+D^T A^{-1}C)^{-1}D^T A^{-1} \tag{Б.4.2}$$

Постоји и специјалан случај инверзне матричне леме који је у употреби у теорији естимације и назива се Шерман-Морисон-Вудбуријева формула:

$$(R+PQP^T)^{-1} = R^{-1} - R^{-1}P(Q^{-1}+P^T R^{-1}P)^{-1}P^T R^{-1} \tag{Б.4.3}$$

Докази Шерман-Морисонове леме и Шерман-Морисон-Вудбуријеве леме могу се једноставно извести. У том смислу, у наставку овог прилога биће изведен доказ за

Шерман-Морисонову формулу. Применом идентичног поступка може се извести и доказ за Шерман-Морисон-Вудбуријеве лему.

Да би се доказала једнакост (Б.4.2) све што је потребно је показати да важи следећа једнакост:

$$(A^{-1} - A^{-1}C(I + D^T A^{-1}C)^{-1} D^T A^{-1})(A + CD^T) = I \tag{Б.4.4}$$

Уведимо следећу смену ради једноставнијег записивања:

$$B = (I + D^T A^{-1}C)^{-1} \tag{Б.4.5}$$

Једнакост (Б.4.4) сада гласи

$$(A^{-1} - A^{-1}CBD^T A^{-1})(A + CD^T) = I \tag{Б.4.6}$$

Множењем чланова израза добијамо:

$$\begin{gathered}\underbrace{A^{-1}A}_{I} - A^{-1}CBD^T A^{-1}CD^T - A^{-1}CBD^T \underbrace{A^{-1}A}_{I} + A^{-1}CD^T = I \\ I + A^{-1}C(D^T - BD^T - BD^T A^{-1}CD^T) = I\end{gathered} \tag{Б.4.7}$$

Да би претходна једнакост била задовољена потребно је показати да је израз у загради једнак нули:

$$\begin{gathered}I + A^{-1}C(I - B - BD^T A^{-1}C)D^T = I \\ I + A^{-1}C(I - B\underbrace{(I + D^T A^{-1}C)}_{B^{-1}})D^T = I \\ I + A^{-1}C\underbrace{(I - \underbrace{BB^{-1}}_{I})}_{0}D^T = I\end{gathered} \tag{Б.4.8}$$

чиме је инверзна матрична лема доказана.

Б.5 Развијање функције векторске промењљиве у Тејлоров ред

Аналогно развијању функције скаларне промењљиве у Тејлоров ред у околини неке посматране тачке x_o, математички је дефинисан и развој векторске функције у околини тачке (вектора) x_o.

Тејлорова теорема у простору $\Re^n$ каже да ако је $f(x)$ нека функција дефинисана у $\Re^n$, при чему је аргумент $f(x)$ реална промењљива дефинисана у $x \in \Re^{nx1}$, онда се вредност $f(x)$ у тачки x може одредити на следећи начин:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^T \nabla f(x_0) + (x - x_0)^T H(x_0)(x - x_0) + O(\|x - x_0\|^2) \quad \text{(Б.5.1)}$$

Где су:

x_o – тачка у којој се функција апроксимира Тејлоровим редом (полиномом),

$\nabla f(x_0)$ - градијент векторске фунције $\dfrac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}_n}$ дефинисан изразом (Б.1.2) срачунат у тачки апроксимације x_o, односно $\left(\dfrac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}_n}\right)_{x=x_0}$,

$H(x_0)$ - матрица других извода векторске функције (*Хесијан*) дефинисана изразом (Б.1.3), срачуната у тачки апроксимације x_o, где су елементи матрице $h_{nm}(x) = \left(\dfrac{\partial^2 \mathbf{f}(x)}{\partial \mathrm{x}_n \partial x_m}\right)_{x=x_0}$

Ако је тачка x_o *критична тачка (екстрем)* онда члан реда $(x - x_0)^T H(x_0)(x - x_0)$ одређује понашање функције $f(x)$ у тачки x која је у непосредној близини тачке x_o:

- ♦ Ако је матрица $H(x)$ позитивно-дефинитна, онда функција $f(x)$ има минимум у тачки x,
- ♦ Ако је матрица $H(x)$ негативно-дефинитна, онда функција $f(x)$ има максимум у тачки x.

Б.6 Норма Махаланобиса[1]

За разлику од еуклидске норме која је дефинисана следећим изразом:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^T x} \qquad \forall\, x \in \Re^{nx1} \tag{Б.6.1}$$

норма (метрика) *Махаланобиса* уводи тежинску матрицу која представља корелацију између два скупа. Норма *Махаланобиса* је дата као:

$$\|d\| = \sqrt{(x - x_0)^T P^{-1} (x - x_0)} \qquad \forall\, x \in \Re^{nx1} \tag{Б.6.2}$$

На основу (Б.6.2) веома једноставно је закључити да се за јединичну тежинску матрицу норма *Махаланобиса* своди на еуклидску норму. Норма *Махаланобиса* се користи да одреди сличност између два скупа, једног чије вредности су познате и другог чије вредности треба одредити.

[1] Прасанта Шандра Махаланобис (1893-1972), индијски математичар

3. Прилог В

Калманов филтер (основна формулација)

Нека је дат неки сигнал $x_1(t)$ са придруженим шумом $x_2(t)$, и замислимо да само збир ове две величине $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ можемо да одредимо, односно употребом сензора можемо "доћи" до информације о збиру ове две величине при чему не знамо колики део сензорске информације $y(t)$ припада "правом" $x_1(t)$ а колики шуму $x_2(t)$. Такође, замислимо и да нам је доступна информација о претходним мерењима на основу којих можемо да формирамо следећи низ $\{y(t_0), y(t_1),..., y(t)\}$. Питање на које треба дати одговор је: *Шта можемо да закључимо о стању система у тренутку* t_1 *ако* t_1 *може да буде мање, веће или једнако тренутку* t? *Естимација* (оцењивање) представља процес оцењивања параметара стања или пак самог стања система на основу прикупљених информација. Проблем естимације се може разврстати у три категорије.

- *Филтрација*; $t_1 = t$ - представља процес који за циљ има одређивање удела сигнала $x_1(t)$ и шума $x_2(t)$ у сензорској информацији $y(t)$.
- *Предикција*; $t_1 > t$ - сврха процеса предикције је да се на основу свих информација прикупљених до тренутка t направи што боље предвиђање стања система, или само једног елемента система, у тренутку t_1.
- *Интерполација;* $t_1 < t$ - основни циљ процеса интерполације је прикупљање што више валидних информација о неком процесу или систему.

Калманов филтер претпоставља да се линерани динамички систем напише у форми једначина које описују простор стања ида се на тим једначинама изведе *рекурзивна естимација*. Под термином рекурзивна естимација подразумева се оцењивање стања система на основу информација о мерењима али се разматрају само најскорије информације о стању система. Другим речима, важи претпоставка Маркова.

Нека је дата једначина система у простору стања:

$$x_{k+1} = F_{k+1,k}\, x_k + w_k \qquad \text{(В.1)}$$

где $F_{k+1,k}$ представља матрицу система која дефинише транзицију система из x_k у x_{k+1}, док је w_k шум чије основне карактеристике су:

$$E[w_n w_k^T] = \begin{cases} Q_k & , n = k \\ 0 & , n \neq k \end{cases} \tag{B.2}$$

Претпоставља се да шум спада у *беле шумове* и да има нормалну расподелу са нултом очекиваном вредношћу. Такође, претпоставља се да почетно стање x_0 познато одређеном очекиваном вредношћу и познатом матрицом коваријанси.

Излаз система (или једначина мерења) је:

$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{B.3}$$

Матрица H_k је матрица излаза система док је v_k шум мерења за кога важе идентичне претпоставке као и код шума система w_k, односно:

$$E[v_n v_k^T] = \begin{cases} R_k & , n = k \\ 0 & , n \neq k \end{cases} \tag{B.4}$$

Два шума, шум мерења v_k и шум система w_k који су уведени у анализу у циљу правилног моделовања реалне ситуације су *независни* један од другог али и од почетног стања x_0. Ова претпоставка се зове *линеарна Гаусова претпоставка*. Након увода у коме је дефинисана суштина проблема и где се уведене основне претпоставке следи извођење Калмановог филтера.

Нека је извршено прикупљање информација (мерење) о стању система у тренутку k на основу чега треба извршити ваљану оцену стања система које је дато вектором стања x_k. Вектор оцене стања система $\hat{x}_k$ може бити представљен као линеарна комбинација предвиђеног стања система на основу претходног понашања и нових информација о стању система:

$$\hat{x}_k = G_k^{(1)} \hat{x}_k^- + G_k y_k \tag{B.5}$$

Вектор $\hat{x}_k^-$ је стање система које је предвиђено на основу претходних стања кроз које је систем прошао и предтсвaља *a priori* процену стања (информације о мерењу *нису* узете у обзир). Вектор y_k је вектор чије компоненте су мерења, док матрице $G_k^{(1)}$ и G_k треба одредити.

Грешка оцене је дефинисана на следећи начин:

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k \tag{B.6}$$

Да би успешно одредили оптимално решење неопходно је увести *критеријум перформансе* J_k , који у овом случају мора да задовољи следеће услове:

- Критеријум перформансе J_k мора бити *ненегативна* функција,
- Критеријум перформансе J_k мора бити *функција* грешке оцене стања система.

На основу горњих услова критеријум перформансе J_k своди се на следећи облик:

$$J_k = E[(x_k - \hat{x}_k)^2] = E[(\tilde{x}_k)^2] \tag{B.7}$$

који представља критеријум минимизације грешке у смислу *методе најмањих квадрата*.

С обзиром да је у питању *Марковски процес* грешка коју правимо је потпуно независна од претходних мерења, односно математички исказано:

$$E[\tilde{x}_k \; y_i^T] = 0 \quad ; \qquad i = 1,2,\ldots,k-1 \tag{B.8}$$

Заменом израза за $\tilde{x}_k$ и y_i^T у израз (B.8) који дефинише ортогоналност две величине добијамо:

$$E[(x_k - G_k^{(1)}\hat{x}_k^- - G_k\, y_k)\; y_i^T] = 0 \;\; ; \;\; i = 1,2,\ldots,k-1 \tag{B.9}$$

Даљим развијањем имамо:

$$E[(x_k - G_k^{(1)}\hat{x}_k^- - G_k H_k x_k - G_k w_k)\; y_i^T] = 0 \tag{B.10}$$

Одакле се након сређивања добија следећа једначина:

$$E[(I - G_k H_k - G_k^{(1)})x_k \; y_i^T + G_k^{(1)}(x_k - \hat{x}_k^-)\; y_i^T] = 0 \tag{B.11}$$

Оператор математичког очекивања E је линеарни оператор па након његове примене на горњи израз уз чињеницу да је грешка која се направи пре мерења (на основу *a priori* информација) *независна* од мерења y_k ($E[(x_k - \hat{x}_k^-)\; y_i^T] = 0$) следи:

$$(I - G_k H_k - G_k^{(1)})E[x_k \; y_i^T] = 0 \tag{B.12}$$

Израз (B.12) ће бити тачан само у случају ако је члан $(I - G_k H_k - G_k^{(1)})$ једнак нули за потпуно произвољне величине x_k и y_i, па је на основу тога прва непозната величина (матрица) у функцији друге:

$$G_k^{(1)} = I - G_k H_k \tag{B.13}$$

Заменом у полазни израз за $\hat{x}_k$ и након сређивања добијамо:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + G_k(y_k - H_k \hat{x}_k^-) \tag{B.14}$$

Матрица G_k назива се *Калманово појачање* (*Kalman Gain*) и "физички" представља наш степен поверења у последње мерење које је извршено, односно колико озбиљно схватамо мерење у односу на предвиђену вредност мерења $H_k \hat{x}_k^-$.

Да би целокупно извођење Калмановог филтера било комплетно потребно је одредити матрицу Калмановог појачања у целости. У том циљу можемо увести нову величину у анализу која се назива *иновација мерења*:

$$\tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_k \tag{B.15}$$

која дефинише колико нових информација имамо у y_k. Величина $\hat{y}_k$ је *предикција мерења* која је извршена на основу свих претходних мерења $y_1, y_2, .., y_{k-1}$. Вектор иновације мерења може бити написан у следећем, знатно погоднијем облику

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k &= y_k - \hat{y}_k \\ &= H_k x_k + v_k - H_k \hat{x}_k^- \\ &= H_k (x_k - \hat{x}_k^-) + v_k \\ &= H_k \tilde{x}_k^- + v_k \end{aligned} \tag{B.16}$$

Однос између грешке оцене $\tilde{x}_k$ и предикције мерења $\hat{y}_k$ је на основу принципа ортогоналности дат следећом релацијом

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_k \, \hat{y}_k^T] &= 0 \\ E[(x_k - \hat{x}_k) \, \hat{y}_k^T] &= 0 \end{aligned} \tag{B.17}$$

одакле следи и

$$E[(x_k - \hat{x}_k) \, \tilde{y}_k^T] = 0 \tag{B.18}$$

Принципом ортогоналности се исказује да је коваријанса компонената вектора грешке оцене стања система и компонената вектора мерења нула. Једнакост (B.18) има велики значај с обзиром да се на основу особине ортогоналности грешке оцене $\tilde{x}_k$ и предикције мерења $\hat{y}_k$ изводи израз за Калманово појачање. Наиме, грешка оцене $\tilde{x}_k$ може бити написана и на следећи начин

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= x_k - \hat{x}_k \\ &= x_k - \hat{x}_k^- - G_k H_k x_k - G_k v_k + G_k H_k \hat{x}_k^- \\ &= (I - G_k H_k) \underbrace{(x_k - \hat{x}_k^-)}_{\tilde{x}_k^-} - G_k v_k \end{aligned} \tag{B.19}$$

где је са $\tilde{x}_k^-$ обележена грешка пре него што је мерење узето у обзир.

Развијањем израза (B.18) добија се:

$$E[\{(I - G_k H_k)\tilde{x}_k^- - G_k v_k\}(H_k \tilde{x}_k^- + v_k)^T] = 0 \tag{B.20}$$

уз примену чињенице да су шум мерења v_k и $\tilde{x}_k^-$ ортогонални, имамо

$$(I - G_k H_k) E[\tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T] H_k^T - G_k \underbrace{E[v_k v_k^T]}_{R_k} = 0 \tag{B.21}$$

Величина $E[\tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T]$ може бити развијена на следећи начин:

$$E[\tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T] = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] = P_k^- \tag{B.22}$$

и представља матрицу коваријанси пре него што су информације о мерењу узете у обзир.

Матрица Калмановог појачања се сада лако одређује:

$$G_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1} \tag{B.23}$$

Као што се може видети, матрица Калмановог појачања зависи од *a priori* матрице коваријанси P_k^-, матрице излаза система H_k, и матрице коваријанси шума мерења R_k. Матрица коваријанси стања система P_k се може написати у следећем облику:

$$P_k = E[\tilde{x}_k (\tilde{x}_k)^T] = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \tag{B.24}$$

Заменом израза за грешку вектора стања у претходни израз:

$$P_k = E[\{(I - G_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) - G_k v_k\}\{(I - G_k H_k)(x_k - \hat{x}_k^-) - G_k v_k\}^T] \tag{B.25}$$

Одакле се након сређивања уз примену претпоставке о независности грешке стања система и шума мерења v_k добијамо следећи израз:

$$\begin{aligned} P_k &= (I - G_k H_k) E[\tilde{x}_k^- (\tilde{x}_k^-)^T](I - G_k H_k)^T - G_k E[v_k (v_k)^T] G_k^T \\ &= (I - G_k H_k) P_k^- (I - G_k H_k)^T - G_k R_k G_k^T \end{aligned} \tag{B.26}$$

Заменом матрице Калмановог појачања у претходни израз и након сређивања:

$$P_k = (I - G_k H_k) P_k^- \tag{B.27}$$

Претходна једначина показује зависност *a posteriori* (после мерења) матрице коваријанси од *a priori* (пре мерења) матрице коваријанси. Преостало је само да се покаже како претходно стање система утиче на садашње.

Ако напишемо следећу једнакост:

$$\hat{x}_k^- = F_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \tag{B.28}$$

где матрица $F_{k,k-1}$ представља матрицу система која дефинише транзицију оцене стања система у тренутку $k-1$ у оцену стања система у тренутку k али пре него што је мерење извршено. Грешку оцене $\tilde{x}_k^-$ пре него што је мерење узето у обзир можемо написати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^- &= x_k - \hat{x}_k^- \\ &= (F_{k,k-1} x_{k-1} + w_{k-1}) - F_{k,k-1} \hat{x}_{k-1} \\ &= F_{k,k-1} \tilde{x}_k + w_{k-1} \end{aligned} \tag{B.29}$$

Коваријансна матрица стања система пре мерења је дата у следећем облику:

$$\begin{aligned} P_k^- &= F_{k,k-1} E[\tilde{x}_{k-1} (\tilde{x}_{k-1})^T] F_{k,k-1}^T + E[w_{k-1} w_{k-1}^T] \\ &= F_{k,k-1} P_{k-1} F_{k,k-1}^T + Q_{k-1} \end{aligned} \tag{B.30}$$

који тачно показује како *a priori* матрица P_k^- у тренутку k зависи од *a posteriori* матрице коваријанси P_{k-1} у тренутку $k-1$, али и од коваријансне матрице Q_{k-1}.