

Универзитет у Београду – Машински факултет  
Дипломске академске студије – 2. година (трећи семестар)  
Шк. год. 2009/2010  
Модул: Производно машинство  
Предмет: Интелигентни технолошки системи (ПРО220-0131)  
Предметни наставници:  
Проф. др Зоран Миљковић и проф. др Бојан Бабић

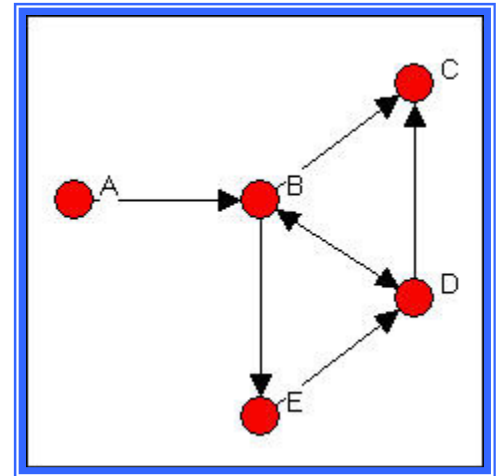
# Планирање путање – A\* алгоритам

Предметни сарадници:  
др Божица Бојовић и Најдан Вуковић, дипл. инж. маш.

# Увод

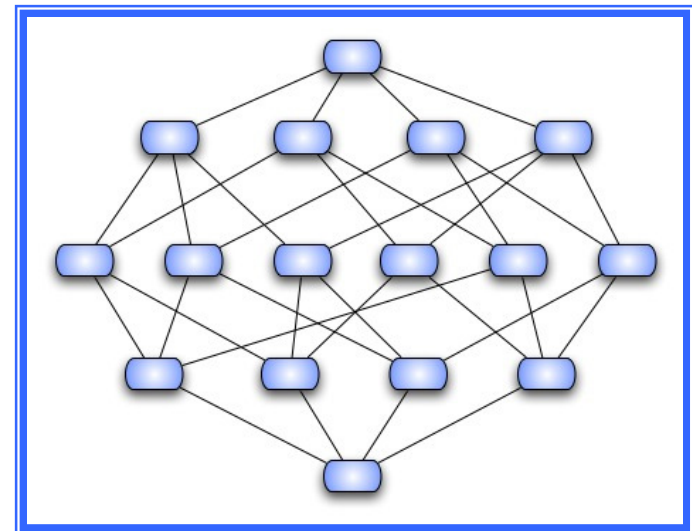
- Алгоритми претраживања
- $A^*$ , Дајкстра, Google's Page Rank...
- Web-search
- Најкраћи пут између две тачке

# Основне информације



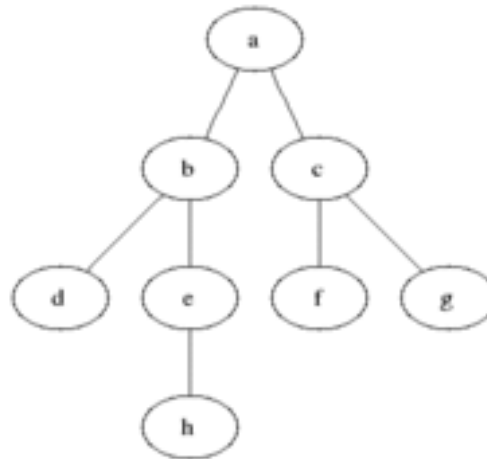
- Граф (апстрактан математички појам) је скуп чворова и веза(грана) између чворова;
- Граф који има **коначан број** чворова је **коначан** граф.
- Граф са **бесконачним бројем чворова** је **бесконачан** граф.
- Ако је **грана графа АБ исто што и БА** и то важи за све гране графа, онда је граф **симетричан** или **неоријентисан**;
- Ако **грана графа АБ није исто што и БА** тада је цео граф **оријентисан** или **антисиметричан**;

- $G = G(V,E)$   $\Rightarrow$  граф
- $V$  – vertex (node)  $\Rightarrow$  чвор
- $E$  – edge  $\Rightarrow$  веза
- Путања представља низ чворова  $\{V_i\}$  тако да између два суседна чвора  $V_i$  и  $V_{i+1}$  постоји веза  $E_{i+1}$



# Основне информације

- **Depth-first search** – започиње претраживање дуж једне гране графа;
- Тек након тога прелази на следећу грану;



- **Breadth-first search** (похлепни алгоритми) – започиње претраживање чворова на истом нивоу;

# A\* алгоритам – основни појмови

- Планирање путање - најкраћи пут од тачке А до тачке Б;
- Улазне величине: граф  $G = G(V,E)$
- Излазна величина: најкраћи пут од почетног чвора до жељеног чвора – циља;
- $O$  - отворени скуп (скуп приоритета);
- $C$  - затворени скуп (скуп „посећених” чворова);
- $Star(n)$  – скуп свих чворова у непосредној околини чвора  $n$ ;
- $c(n_1, n_2)$  – „дужина” гране између чворова  $n_1$  и  $n_2$
- $g(n)$  – пређени пут од стартног чвора до  $n$ -тог чвора
- $h(n)$  – оцена најкраћег пута од  $n$ -тог чвора до циља
- $f(n) = g(n) + h(n)$  - оцена најкраћег пута од стартног чвора до циља.

## A\* алгоритам (псеудокод)

**Input:** graf

**Output:** najkraći put od starta do cilja

**While**  $O$  is empty

Izaberi  $n_{best}$  iz skupa  $O$  tako da  $f(n_{best}) \leq f(n) \quad \forall n \in O$

Ukloni  $n_{best}$  iz skupa  $O$  i dodaj ga skupu  $C$

**If**  $n_{best} = q_{cilj}$

**exit**

**endif**

Proširi  $n_{best}$ :  $\forall x \in Star(n_{best}), x \notin C$

**If**  $x \notin O$

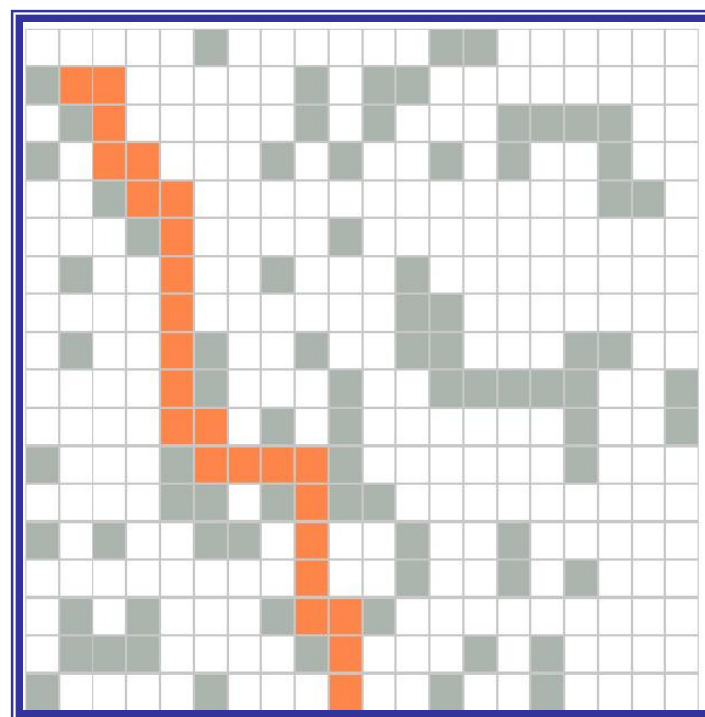
dodaj  $x$  skupu  $O$

**elseif**  $g(n_{best}) + c(n_{best}, x) < g(x)$

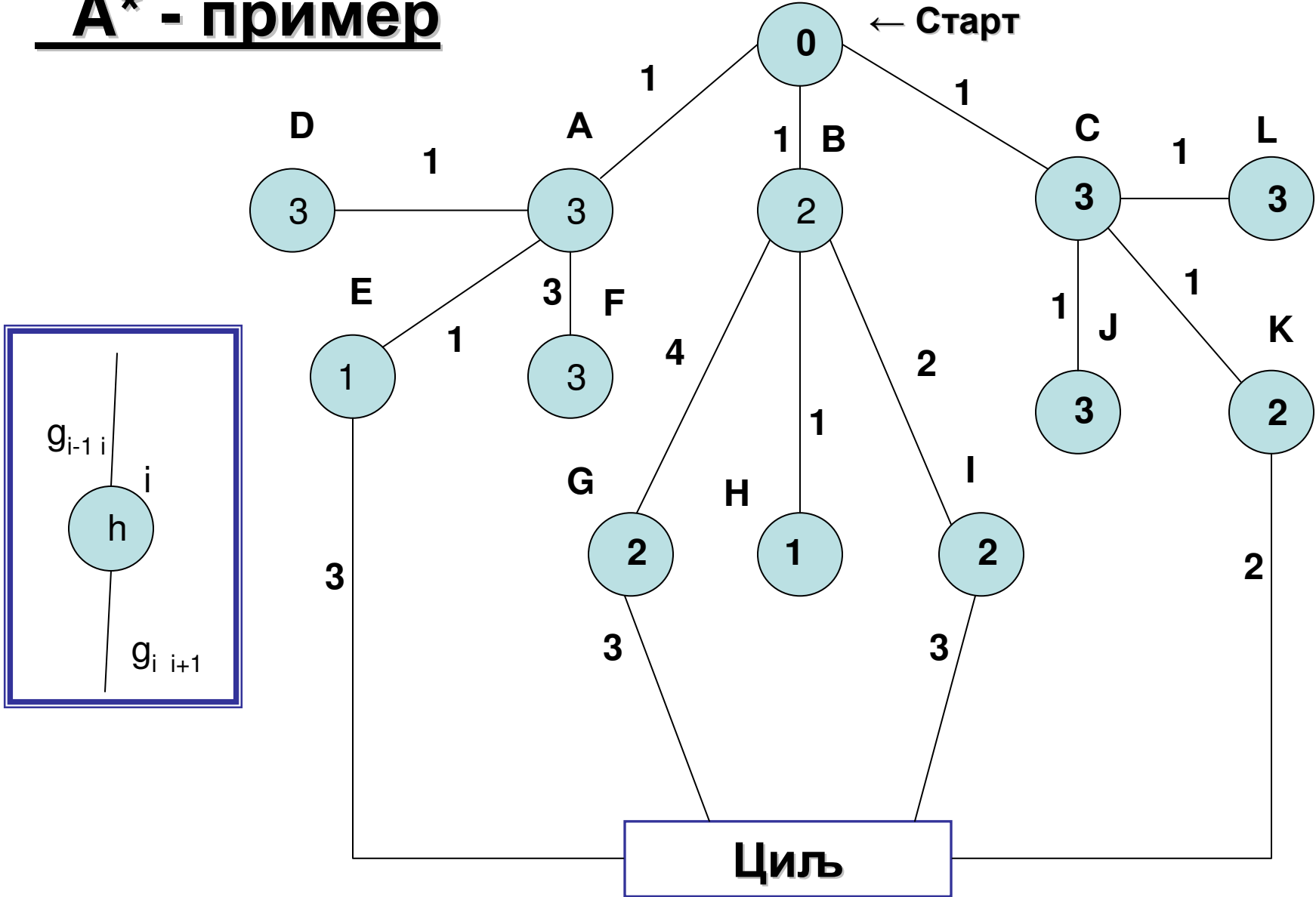
dodaj  $x$  putanji od  $n_{best}$

**endif**

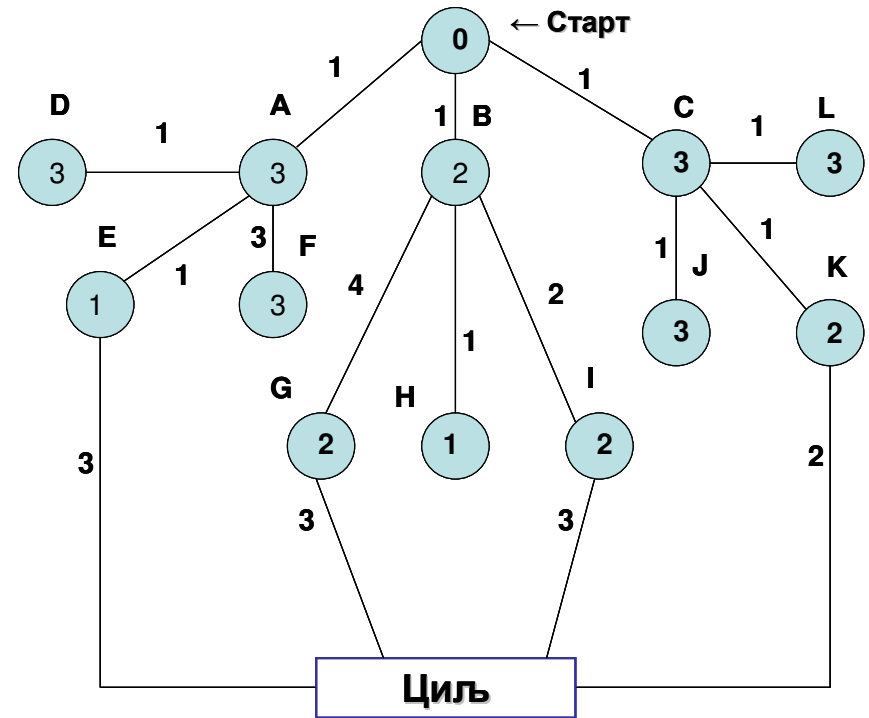
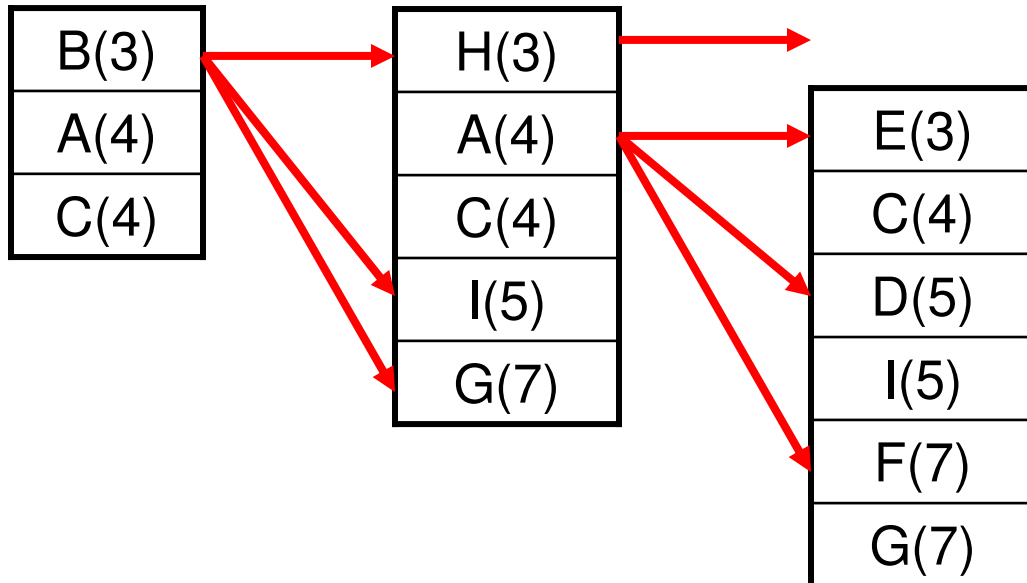
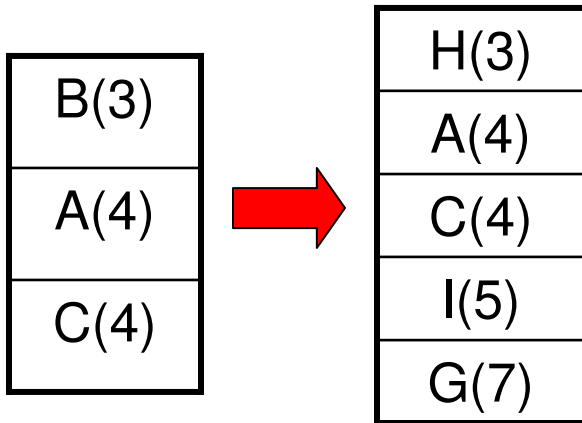
**endwhile**



# A\* - пример



# A\* - пример



...укупан пређени пут до чвора  $n + h(n)$

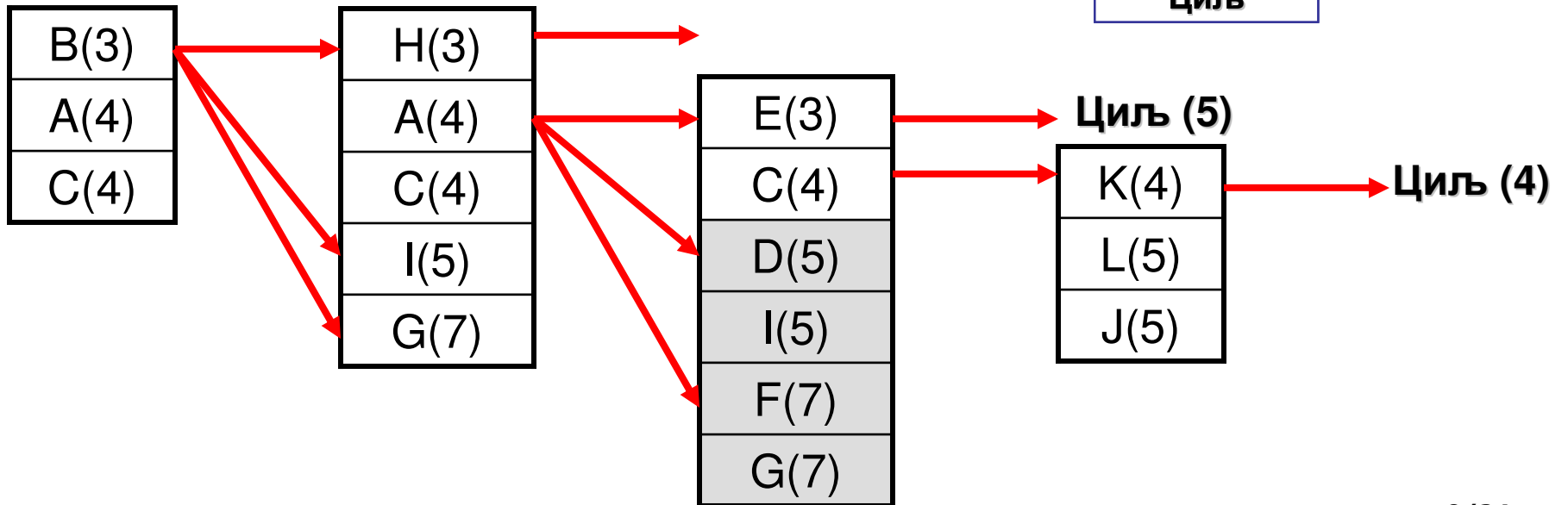
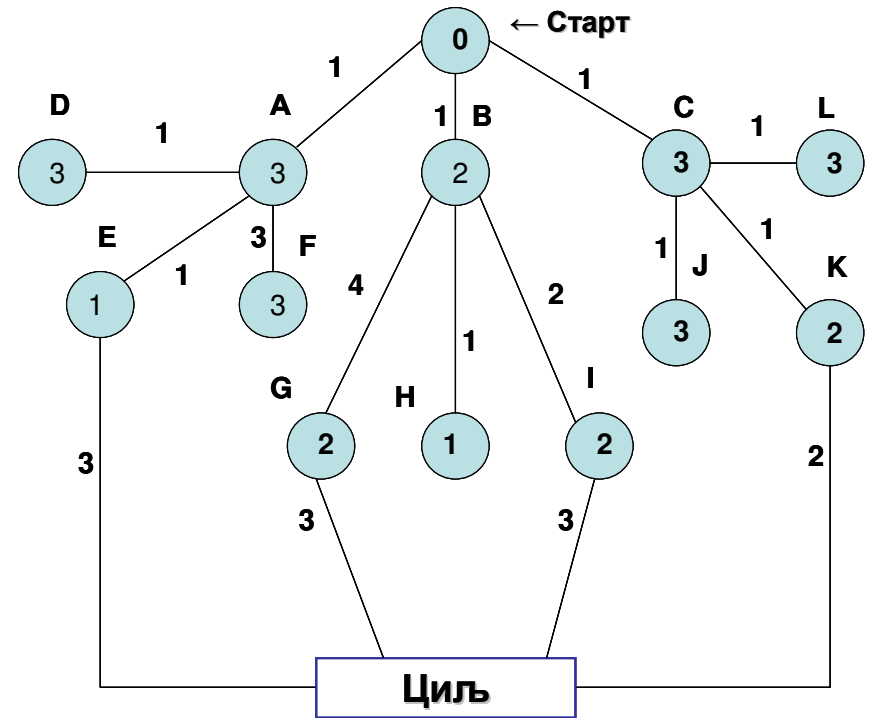
$$f(n) = g(n) + h(n)$$



# A\* - пример

...укупан пређени пут до чвор  $n + h(n)$

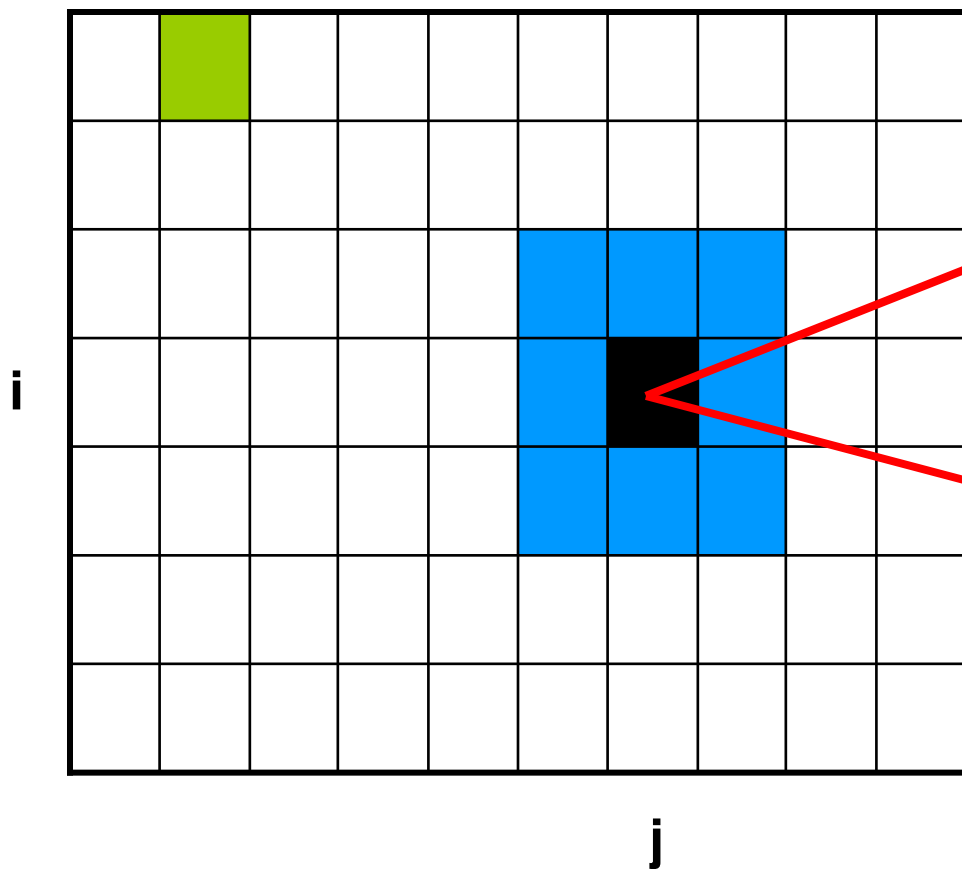
$$f(n) = g(n) + h(n)$$



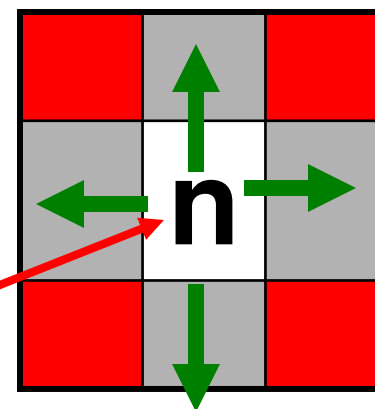
# A\* - пример најкраће путање

Дискретизација радног окружења у  $k$  пиксела;

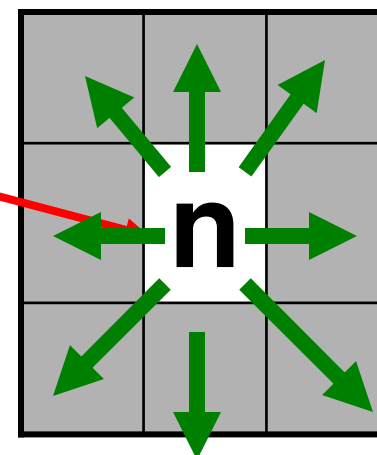
Пиксел-елемент радног окружења:  $X \times Y ; [m] \times [m]$



Четвороспојиви



Осмоспојиви



# h(n) - Heuristics

- **Heuristic** (pronounced /hjʊ'ristik/, from the Greek "Εὕρισκω" for "find" or "discover") is an adjective for **experience-based techniques** that help in problem solving, learning and discovery (<http://en.wikipedia.org/wiki/Heuristic>);
- Heuristics are "**rules of thumb**", educated guesses, intuitive judgments or simply common sense;
- Величина/параметар који се одређује на основу искуства и чијом применом можемо да одредимо решење посматраног проблема.

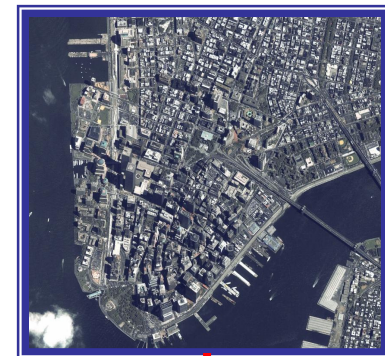
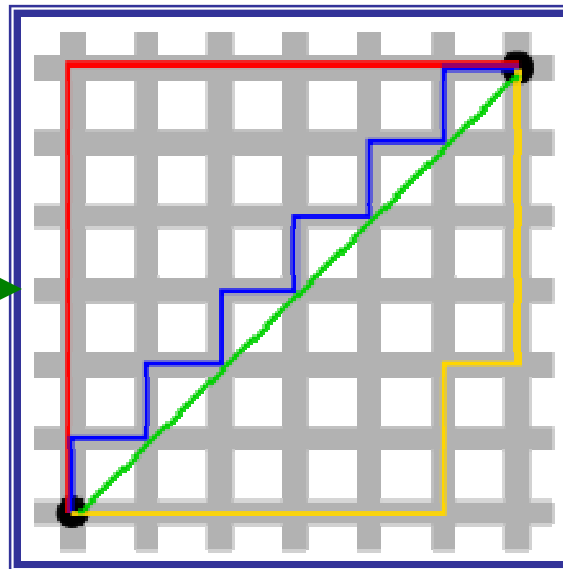
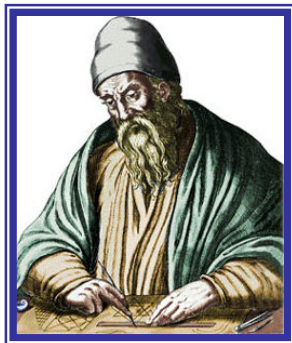
# $h(n)$ - Heuristics

Еуклидска норма

Менхетн норма

$$d_E(n, n_{cilj}) = \sqrt{(n_x - n_{xcilj})^2 + (n_y - n_{ycilj})^2}$$

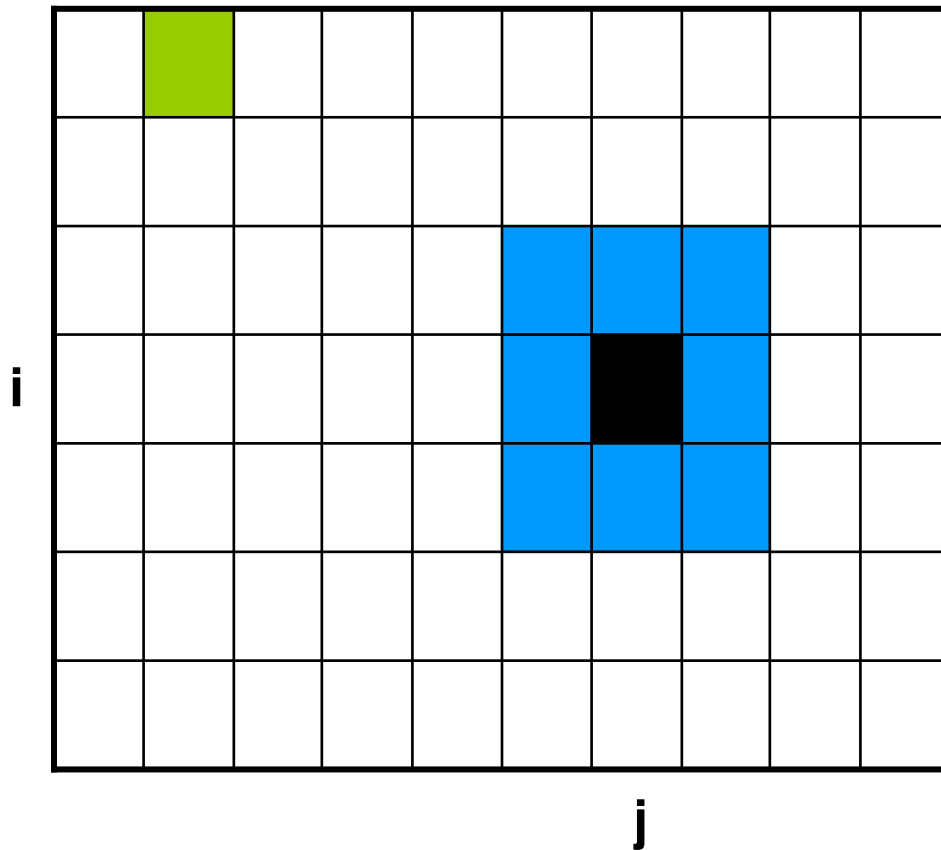
$$d_M(n, n_{cilj}) = |n_x - n_{xcilj}| + |n_y - n_{ycilj}|$$



# A\* - пример најкраће путање

Дискретизација радног окружења у  $k$  пиксела;

Пиксел-елемент радног окружења:  $X \times Y ; 1 \text{ [cm]} \times 1 \text{ [cm]}$



„Цена” помераја од пиксела  $n$  до суседних пиксела:

$$g(n(i-1,j-1)) = 1.41$$

$$g(n(i-1,j)) = 1$$

$$g(n(i-1,j+1)) = 1.41$$

$$g(n(i,j-1)) = 1$$

$$g(n(i,j+1)) = 1$$

$$g(n(i+1,j-1)) = 1.41$$

$$g(n(i+1,j)) = 1$$

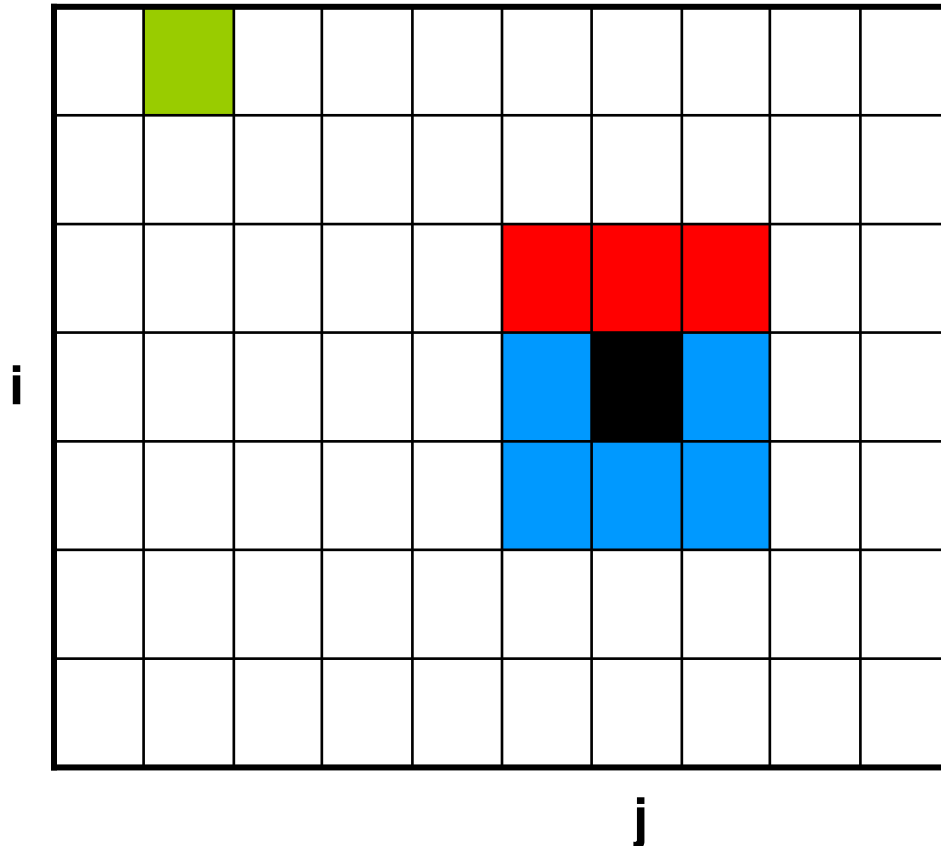
$$g(n(i+1,j+1)) = 1.41$$

$g_1 = 1.41$	$g_2 = 1$	$g_3 = 1.41$
$g_4 = 1$	<b>n</b>	$g_5 = 1$
$g_6 = 1.41$	$g_7 = 1$	$g_8 = 1.41$

# A\* - пример најкраће путање

Шта ако имамо препреку на суседном пикселу?

Усвајамо да је **цена помераја** од пиксела  $n$  до пиксела на коме је лоцирана препрека **изузетно висока**, нпр. **10000**



„Цена” помераја од чвора  $n$  до суседних чворова:

$$g(n(i-1,j-1)) = 14100$$

$$g(n(i-1,j)) = 10000$$

$$g(n(i-1,j+1)) = 14100$$

$$g(n(i,j-1)) = 1$$

$$g(n(i,j+1)) = 1$$

$$g(n(i+1,j-1)) = 1.41$$

$$g(n(i+1,j)) = 1$$

$$g(n(i+1,j+1)) = 1.41$$

$g_1 = 14100$	$g_2 = 10000$	$g_3 = 14100$
$g_4 = 1$	<b>n</b>	$g_5 = 1$
$g_6 = 1.41$	$g_7 = 1$	$g_8 = 1.41$

# A\* - пример најкраће путање

- $g_{\text{vertikalno}} = 1;$
- $g_{\text{horizontalno}} = 1;$
- $g_{\text{dijagonalno}} = 1,4;$
- $g_{\text{vertikalno-prepreka}} = 100;$
- $g_{\text{horizontalno-prepreka}} = 100;$
- $g_{\text{dijagonalno-prepreka}} = 100,4;$

$$h_{\text{horizontalno}} = 1;$$

$$h_{\text{dijagonalno}} = 1,4;$$

...Ова хеуристика није ни Еуклидска ни Менхетн норма...

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0	h=1,0	h=0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4	h=2,4	h=1,4	h=1,0
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8	h=3,8	h=2,8	h=2,4	h=2,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2	h=5,2	h=4,2	h=3,8	h=3,4	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6	h=6,6	h=5,6	h=5,2	h=4,8	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0	h=7,0	h=6,6	h=6,2	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>B/K</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>



Пиксел 2,3:  $g_{\text{dijagonalno}} + h(2,3) = 1,4 + 5,6 = 7,0$

Пиксел 1,3:  $g_{\text{horizontalno}} + h(1,3) = 1 + 6,6 = 7,6$

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0	h=1,0	h=0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4	h=2,4	h=1,4	h=1,0
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8	h=3,8	h=2,8	h=2,4	h=2,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2	h=5,2	h=4,2	h=3,8	h=3,4	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6 f=9,0	h=6,6 f=7,6	h=5,6 f=7,0	h=5,2	h=4,8	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0 f=9,0	h=7,0 f=7,0	h=6,6 f=7,6	h=6,2	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>В/к</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

Пиксел 3,3:  $\text{pređeni\_put} + g_{\text{vertikalno-prepreka}} + h(3,3) = 1,4 + 100 + 5,2 = 106,6$

Пиксел 3,4:  $\text{pređeni\_put} + g_{\text{dijagonalno}} + h(3,4) = 1,4 + 1,4 + 4,2 = 7,0$

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0	h=1,0	h=0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4	h=2,4	h=1,4	h=1,0
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8	h=3,8	h=2,8	h=2,4	h=2,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2 f=108	h=5,2 f=106,6	h=4,2 f=7,0	h=3,8	h=3,4	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6 f=9,0	h=6,6 f=7,6	h=5,6 f=7,0	h=5,2 f=106,6	h=4,8	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0 f=9,0	h=7,0 f=7,0	h=6,6 f=7,6	h=6,2 f=9,0	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>В/к</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

Пиксел 4,3:  $\text{pređeni\_put} + g_{\text{dijagonalno-prepreka}} + h(4,3) = 2,8 + 100,4 + 4,8 = 108$

Пиксел 4,5:  $\text{pređeni\_put} + g_{\text{dijagonalno}} + h(4,5) = 2,8 + 1,4 + 2,8 = 7,0$

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0	h=1,0	h=0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4	h=2,4	h=1,4	h=1,0
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8 f=108	h=3,8 f=7,6	h=2,8 f=7,0	h=2,4	h=2,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2 f=108	h=5,2 f=106,6	h=4,2 f=7,0	h=3,8 f=7,6	h=3,4	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6 f=9,0	h=6,6 f=7,6	h=5,6 f=7,0	h=5,2 f=106,6	h=4,8 f=9,0	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0 f=9,0	h=7,0 f=7,0	h=6,6 f=7,6	h=6,2 f=9,0	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>В/к</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

Пиксел 5,5:  $\text{pređeni\_put} + g_{\text{vertikalno}} + h(5,5) = 4,2 + 1 + 2,4 = 7,6$

Пиксел 5,6:  $\text{pređeni\_put} + g_{\text{dijagonalno}} + h(5,6) = 4,2 + 1,4 + 1,4 = 7,0$

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0	h=1,0	h=0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4 f=9,0	h=2,4 f=7,6	h=1,4 f=7,0	h=1,0
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8 f=108	h=3,8 f=7,6	h=2,8 f=7,0	h=2,4 f=7,6	h=2,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2 f=108	h=5,2 f=106,6	h=4,2 f=7,0	h=3,8 f=7,6	h=3,4 f=9,0	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6 f=9,0	h=6,6 f=7,6	h=5,6 f=7,0	h=5,2 f=106,6	h=4,8 f=9,0	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0 f=9,0	h=7,0 f=7,0	h=6,6 f=7,6	h=6,2 f=9,0	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>В/к</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

Пиксел 6,7:  $pre\ddot{c}eni\_put + g_{dijagonalno} + h(6,7) = 5,6 + 1,4 + 0 = 7,0$

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0 f=9,0	h=1,0 f=7,6	h=0 f=7,0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4 f=9,0	h=2,4 f=7,6	h=1,4 f=7,0	h=1,0 f=7,6
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8 f=108	h=3,8 f=7,6	h=2,8 f=7,0	h=2,4 f=7,6	h=2,0 f=9,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2 f=108	h=5,2 f=106,6	h=4,2 f=7,0	h=3,8 f=7,6	h=3,4 f=9,0	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6 f=9,0	h=6,6 f=7,6	h=5,6 f=7,0	h=5,2 f=106,6	h=4,8 f=9,0	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0 f=9,0	h=7,0 f=7,0	h=6,6 f=7,6	h=6,2 f=9,0	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>В/к</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

<b>6</b>	h=6,0	h=5,0	h=4,0	h=3,0	h=2,0 f=9,0	h=1,0 f=7,6	h=0 f=7,0
<b>5</b>	h=6,4	h=5,4	h=4,4	h=3,4 f=9,0	h=2,4 f=7,6	h=1,4 f=7,0	h=1,0 f=7,6
<b>4</b>	h=6,8	h=5,8	h=4,8 f=108	h=3,8 f=7,6	h=2,8 f=7,0	h=2,4 f=7,6	h=2,0
<b>3</b>	h=7,2	h=6,2 f=108	h=5,2 f=106,6	h=4,2 f=7,0	h=3,8 f=7,6	h=3,4 f=9,0	h=3,0
<b>2</b>	h=7,6 f=9,0	h=6,6 f=7,6	h=5,6 f=7,0	h=5,2 f=106,6	h=4,8 f=9,0	h=4,4	h=4,0
<b>1</b>	h=8,0 f=9,0	h=7,0 f=7,0	h=6,6 f=7,6	h=6,2	h=5,8	h=5,4	h=5,0
<b>B/k</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>

# Корисни линкови за A\* алгоритам

- <http://theory.stanford.edu/~amitp/GameProgramming/>
- [http://en.wikipedia.org/wiki/A\\* search algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/A*_search_algorithm)

Хвала на пажњи!

Питања?