Šesta auditorna vežba iz Upravljanja kvalitetom proizvoda 1

METOD STATISTIČKOG TESTIRANJA HIPOTEZA

1. SEPTEMBAR 2000, Gr1, Zad1 (modifikovan) *(provera hipoteze o slučajnosti uzorka)*

Postavka:

Na automatu se obrađuje čaura, na kojoj se, pored ostalih, kontroliše i dimenzija $x = 25^{+0.045}_{+0.010}$ mm. Planom inspekcije izvučeno je 30 uzoraka, a merenjem su dobijene sledeće vrednosti:

N_i	x_i	N_i	x_i	N_i	x_i	N_i	x_i	N_i	x_i	N_i	x_i
1.	25.030	6.	25.030	11.	25.025	16.	25.035	21.	25.050	26.	25.045
2.	25.015	7.	25.010	12.	25.040	17.	25.035	22.	25.035	27.	25.035
3.	25.025	8.	25.020	13.	25.030	18.	25.020	23.	25.025	28.	25.030
4.	25.035	9.	25.020	14.	25.030	19.	25.030	24.	25.025	29.	25.025
5.	25.040	10.	25.025	15.	25.035	20.	25.045	25.	25.030	30.	25.030

Potrebno je, uz davanje odgovarajućih komentara, proveriti hipotezu o slučajnosti uzorka metodom uzastopnih razlika, za nivo značajnosti 5%.

Rešenje:

Veličina (obim) uzorka iznosi 30. Najpre vršimo proračun matematičkog očekivanja i standardne devijacije, pomoću tabele 1.

Tabela 1.

x_i	f_i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$	$(x_i - a)\cdot f_i$	$(x_i - a)^2\cdot f_i$
25.01	1	-0.02	0.000400	-0.02	0.000400
25.015	1	-0.015	0.000225	-0.015	0.000225
25.02	3	-0.01	0.000100	-0.03	0.000300
25.025	6	-0.005	0.000025	-0.03	0.000150
a = 25.03	8	0	0.000000	0	0.000000
25.035	6	0.005	0.000025	0.03	0.000150
25.04	2	0.01	0.000100	0.02	0.000200
25.045	2	0.015	0.000225	0.03	0.000450
25.05	1	0.02	0.000400	0.02	0.000400
Σ	**30**			**0.005**	**0.002275**

Veličina $\mathbf{f_i}$ u tabeli 1 predstavlja empirijske frekvencije dobijene na osnovu tabele u postavci zadatka, a veličina **a** predstavlja karakteristiku sa najvećom frekvencijom.

Na osnovu tabele 1 dobijamo sledeće vrednosti aritmetičke sredine i standardne devijacije:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\cdot f_i = 25.030 - \frac{1}{30}\cdot 0.005 = 25.030167 \text{ mm}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\cdot f_i - (\bar{x} - a)^2} = \sqrt{\frac{1}{30}\cdot 0.002275 - (25.030167 - 25.03)^2} = 0.008706639 \text{ mm}$$

Postavljamo hipotezu da je uzorak slučajan (nulta hipoteza). Za proveru hipoteze o slučajnosti uzoraka koristimo metodu uzastopnih razlika.

Potrebno je najpre formirati niz razlika aritmetičkih sredina uzastopnih uzoraka (d_i – tabela 2).

Tabela 2.

N_i	x_i	$d_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	N_i	x_i	$d_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$	N_i	x_i	$d_i = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
1.	25.030	0.015	11.	25.025	0.015	21.	25.050	0.015
2.	25.015	0.010	12.	25.040	0.010	22.	25.035	0.010
3.	25.025	0.010	13.	25.030	0.000	23.	25.025	0.000
4.	25.035	0.005	14.	25.030	0.005	24.	25.025	0.005
5.	25.040	0.010	15.	25.035	0.000	25.	25.030	0.015
6.	25.030	0.020	16.	25.035	0.000	26.	25.045	0.010
7.	25.010	0.010	17.	25.035	0.015	27.	25.035	0.005
8.	25.020	0.000	18.	25.020	0.010	28.	25.030	0.005
9.	25.020	0.005	19.	25.030	0.015	29.	25.025	0.005
10.	25.025	0.000	20.	25.045	0.005	30.	25.030	

Zatim se formira tabela učestanosti uzastopnih razlika (d_j – tabela 3):

Tabela 3.

razlika d_j	0	0.005	0.010	0.015	0.020
učestanost f_j	6	8	8	6	1

Na osnovu tabele 3 izračunavamo sumu kvadrata uzastopnih razlika:

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 = \sum_{j=1}^{k} d_j^2 = 0.00275 \ \text{mm}$$

gde je k = 5 ≡ broj grupnih intervala uzastopnih razlika.

Ukoliko je uzorak izvučen iz osnovnog skupa sa parametrima $\overline{x}$ i σ_o, dokazuje se u matematičkoj statistici da važi relacija:

$$c^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1} d_i^2 = \frac{1}{2\cdot(30-1)}\cdot 0.00275 = 0.0000474138\ ,$$

gde je sa **c** označena procena disperzije osnovnog skupa preko uzastopnih razlika.

Disperzija osnov. skupa se može oceniti i na osnovu disperzije uzorka (σ), koju popravljamo količnikom n/(n – 1), jer je obim uzorka mali (nije veći od 30):

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2 = \frac{30}{30-1}\cdot 0.008706639^2 = 0.0000784195\,.$$

Provera hipoteze o slučajnosti uzorka (pri nepromenjenoj disperziji osnovnog skupa σ_o^2) izvodi se pomoću kriterijuma da veličina:

$$\delta = \frac{c^2}{s^2} = \frac{0.0000474138}{0.0000784195} = 0.604611\,.$$

mora biti veća od granične veličine δ_q, za n > 20.

Da bismo odredili δ_q potrebno je da prvo proračunamo izraz:

$$\Phi(t_q) = 0.5 - \frac{q}{100} = 0.5 - \frac{5}{100} = 0.45$$

odakle, prema UKP M2, tab.2, određujemo parametar t_q = 1.64485. Napomena: veličina q predstavlja zadati nivo pouzdanosti, u procentima.

Sada možemo odrediti i samu graničnu veličinu δ_q, prema izrazu:

$$\delta_q = 1 - \frac{t_q}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1.64485}{\sqrt{30+1}} = 0.704575434\ .$$

Pošto je: $\boldsymbol{\delta < \delta_q}$, zaključujemo da se **hipoteza o slučajnosti uzorka ne može prihvatiti**.

Komentar: U trenutku izvlačenja uzorka došlo je do pomeranja centra grupisanja mera, odnosno do promene regulisanog položaja alata u odnosu na radni predmet (usled habanja, dilatacija i drugih poremećaja elemenata obradnog sistema).

2. DECEMBAR 2000, Gr1, Zad1 (modifikovan)

(provera hipoteze o postojanju grube greške u elementima datog empirijskog skupa)

Postavka:

Na mašinskom delu koji se serijski izrađuje kontroliše se dimenzija $x = \varnothing\, 16\,^{+0.010}_{+0.002}$ mm, (spoljašnja mera) za koju je izvučeno 25 uzoraka sa po 5 primeraka u uzorku. Kontrolom su dobijene sledeće vrednosti statističkih parametara:

RB	$\overline{X}$ [mm]	Mera rasipanja [μm]	RB	$\overline{X}$ [mm]	Mera rasipanja [μm]	RB	$\overline{X}$ [mm]	Mera rasipanja [μm]	RB	$\overline{X}$ [mm]	Mera rasipanja [μm]	RB	$\overline{X}$ [mm]	Mera rasipanja [μm]
1.	16.005	1	6.	16.012	2	11.	16.004	6	16.	16.005	4	21.	16.004	4
2.	16.006	6	7.	16.004	4	12.	16.006	3	17.	16.007	5	22.	16.006	4
3.	16.005	1	8.	16.005	1	13.	16.004	5	18.	16.004	6	23.	16.007	5
4.	16.006	4	9.	16.006	5	14.	16.006	4	19.	16.007	3	24.	16.003	4
5.	16.002	5	10.	16.005	4	15.	16.003	5	20.	16.005	5	25.	16.004	3

Potrebno je, uz davanje odgovarajućih komentara:

a) Testirati hipotezu o postojanju grube greške u elementima datog empirijskog skupa, za nivo značajnosti q = 2.5%; i

b) Odrediti procentualnu veličinu eventualnog škarta i dati komentar o doradi.

Rešenje:

a) U prvom delu ovog zadatka je potrebno proveriti hipotezu o postojanju grube greške u elementima empirijskog skupa u slučaju kada parametri lokacije i disperzije osnovnog skupa nisu poznati. Zato je neophodno najpre proceniti parametre osnovnog skupa na osnovu izvučenih k = 25 uzoraka.

Aritmetičku sredinu osnovnog skupa procenjujemo aritmetičkom sredinom aritmetičkih sredina uzoraka:

$$\overline{X} = \overline{\overline{x}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i = \frac{1}{25}\cdot 400.131 = 16.0052 \text{ mm.}$$

Pošto je obim uzorka (5 primeraka u uzorku) manji od 10, zaključujemo da je zadata mera rasipanja raspon R, pa standardnu devijaciju osnovnog skupa ocenjujemo na sledeći način:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot\sigma = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{\overline{R}}{d_2} = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{1}{d_2}\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}R_i$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{25}{25-1}}\cdot\frac{1}{2.326}\cdot\frac{1}{25}\cdot 0.099 = 0.00174 \text{ mm.}$$

Napomene:

- Pošto je broj uzoraka manji od 31, koristimo popravljenu ocenu disperzije osnovnog skupa;
- Ovde sa $\overline{X}$ i σ_0 obeležavamo ocene aritmetičke sredine i standardne devijacije osnovnog skupa; i
- Koeficijent d_2 određujemo prema UKP M2, tab.14, za obim uzorka n = 5.

Postavljamo hipotezu da elementi empirijskog skupa (za koji pretpostavljamo da podleže zakonu normalne raspodele), ne sadrže grubu grešku. Vrednost koja najviše odstupa od procenjene aritmetičke sredine osnovnog skupa je maksimalna vrednost aritmetičkih sredina pojedinačnih uzoraka iznosi $\overline{x}_{max}$ = 16.012 mm. Nju upoređujemo sa kritičnom granicom $\mathbf{u_q}$, koja se u slučaju kada parametri osnovnog skupa nisu poznati, već procenjeni, izračunava prema obrascu:

$$u_q = \overline{X} + g_q\cdot\sigma_0 = 16.0052 + 2.88\cdot 0.00174 = 16.0102 \text{ mm,}$$

pri čemu se parametar g_q uzima prema UKP M2, tab.12, za zadati nivo značajnosti 2.5% i veličinu uzorka k = 25 (napomena: ovde se pojedini uzorci dati u tabeli u postavci zadatka tretiraju kao elementi u ukupnom uzorku).

Pošto je $\overline{x}_{max} > u_q$ zaključujemo da se nulta hipoteza mora odbaciti, tj. elementi empirijskog skupa sadrže u sebi grubu grešku.

b) Procenat delova kod kojih se ispitivana karakteristika nalazi iznad maksimalne dozvoljene granice računa se prema obrascu:

$$q_1 = 0.5 - \Phi\left(\frac{x_g - \overline{X}}{\sigma_0}\right) = 0.5 - \Phi\left(\frac{16.010 - 16.0052}{0.00174}\right) = 0.5 - \Phi(2.76) = 0.5 - 0.4970 = 0.003 \text{, odn.}$$

$$q_1 = 0.3\ \%$$

i ovi se delovi, kod spoljašnjih mera, mogu doraditi.

Procenat delova kod kojih se ispitivana karakteristika nalazi ispod minimalne dozvoljene granice računa se prema obrascu:

$$q_2 = 0.5 - \Phi\left(\frac{\overline{X} - x_d}{\sigma_0}\right) = 0.5 - \Phi\left(\frac{16.0052 - 16.002}{0.00174}\right) = 0.5 - \Phi(1.84) = 0.5 - 0.467 = 0.033 \text{, odn. } q_2 = 3.3\ \%$$

i ovi se delovi, kod spoljašnjih mera, ne mogu doraditi i predstavljaju škart.

3. <u>MART 2001, Gr1, Zad1</u>

(provera hipoteze o jednakosti aritmetičkih sredina dva osnovna skupa koji podležu zakonu norm.rasp.)

<u>Postavka</u>:

U jednom pogonu je, na CNC strugu, u toku dve radne nedelje, napravljen veliki broj čaura, prikazanih na slici 1. Kontrolom karakteristike **x = 84 mm** na **86** delova napravljenih u prvoj i **158** delova napravljenih u drugoj nedelji, utvrđene su sledeće vrednosti parametara lokacije i disperzije za prvi uzorak (delovi iz prve nedelje) i drugi uzorak (delovi iz druge nedelje):

$$\bar{x}_1 = \mathbf{84.112\ mm},\ s_1 = \mathbf{0.011\ mm},\ \bar{x}_2 = \mathbf{84.103\ mm},\ s_2 = \mathbf{0.014\ mm.}$$

Proveriti da li se vrednost radne mere na koju je regulisan alat u prvoj radnoj nedelji, promenila pri izradi delova u drugoj nedelji, pod pretpostavkom da se osnovni skupovi iz kojih su izvučeni uzorci pokoravaju normalnoj raspodeli.

<u>Rešenje</u>:

Zadati su sledeći podaci:

- Prvi uzorak: n_1 = 86, $\bar{x}_1$ = 84.112 mm, s_1 = 0.011 mm;
- Drugi uzorak: n_2 = 158, $\bar{x}_2$ = 84.103 mm, s_2 = 0.014 mm.

Pošto su svi delovi napravljeni na istoj mašini u relativno kratkom vremenskom roku, možemo pretpostaviti da su standardne devijacije oba osnovna skupa (prvi osnovni skup – svi delovi napravljeni u prvoj, drugi osnovni skup – svi delovi napravljeni u drugoj radnoj nedelji) jednake. Potrebno je proveriti da li se vrednost radne mere promenila u drugoj u odnosu na prvu radnu nedelju, odnosno da li su se pomerio centar grupisanja mera na izratcima. Dakle, ovde je neophodno proveriti hipotezu o jednakosti aritmetičkih sredina dva osnovna skupa koji podležu zakonu normalne raspodele, na osnovu njihovih uzoraka.

Postavljamo nultu hipotezu da nije došlo do promene mere na koju je alat regulisan, odnosno da su pomenute aritmetičke sredine jednake. Za proveru ove hipoteze koristimo Studentov t-test. Potrebno je najpre izračunati vrednost parametra t_1, prema obrascu:

$$t_1 = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

$$t_1 = \frac{|84.112 - 84.103|}{\sqrt{(86 - 1) \cdot 0.011^2 + (158 - 1) \cdot 0.014^2}} \sqrt{\frac{86 \cdot 158 \cdot (86 + 158 - 2)}{86 + 158}}$$

$$t_1 = 5.16$$

Zatim izračunavamo stepen slobode: k = n_1 + n_2 – 2 = 86 + 158 – 2 = 242.

Napokon, na osnovu UKP M2, tab.9, za k = 242 i nivo značajnosti $\alpha = 0.05$, dobijamo: **t = 1.96**.

Pošto je: 5.16 > 1.96, odnosno $\mathbf{t_1 > t}$, sledi da se hipoteza o jednakosti aritmetičkih sredina mora odbaciti, a to ukazuje na činjenicu da je u toku druge radne nedelje došlo do promene regulisanog položaja alata u odnosu na prvu nedelju.

4. APRIL 2000, Gr1, Zad1 *(provera hipoteze o proporciji osnovnog skupa na osnovu velikog uzorka)*

Postavka:

U prijemnu kontrolu je od dobavljača stigla velika pošiljka proizvoda sa 4% defektnih proizvoda. Proveriti hipotezu kvaliteta proizvoda ovog dobavljača ako je kontrolom utvrđeno da na uzorku od 400 proizvoda ima:

a) 30 defektnih komada,
b) 20 defektnih komada,
c) 25 defektnih komada.

Rešenje:

Ovde je potrebno proveriti hipotezu o proporciji osnovnog skupa na osnovu velikog uzorka (pogledati: UKP, metode II, pog.2.12, str.130). Po hipotezi dobavljača usvojeno je $P = P_0 = 4\%$ (procenat defektnih delova u osnovnom skupu iznosi 4%), i tu hipotezu treba proveriti na uzorku od n = 400 komada.

Proporciju defektnih komada u uzorku izračunavamo prema obrascu:

$$p = \frac{m}{n},$$

gde je m – broj defektnih komada u uzorku.

Pošto se ovde radi o tzv. dvoslojnom osnovnom skupu (komadi mogu biti ili ispravni, ili defektni), sa velikim brojem elemenata, zaključujemo da se proporcije defektnih elemenata pokoravaju zakonu normalne raspodele sa matematičkim očekivanjem (aritmetičkom sredinom) P i standardnom devijacijom koju računamo prema obrascu:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0.04\cdot(1-0.04)}{400}} = 0.009798\,.$$

Na osnovu odgovarajuće proporcije za svaki uzorak izračunavamo sledeći parametar:

$$t_0 = \frac{|p-P_0|}{\sigma_p}.$$

U zavisnosti od veličine ovog parametra izvlačimo za svaki uzorak zaključak o ispravnosti hipoteze o kvalitetu proizvoda dobavljača.

a) m = 30 $$p = \frac{m}{n} = \frac{30}{400} = 0.075 \Rightarrow t_0 = \frac{|p-P_0|}{\sigma_p} = \frac{|0.075-0.04|}{0.009798} = 3.57$$

Pošto je $\mathbf{t_0 = 3.57 > 3}$, prema UKP, metode II, zaključujemo da je razlika p i P_0 visokosignifikantna, tj. **netačna je hipoteza $\mathbf{P = P_0}$**. Dakle, nije tačna tvrdnja dobavljača da u osnovnom skupu ima 4% defektnih delova – taj procenat je veći.

b) m = 20 $$p = \frac{m}{n} = \frac{20}{400} = 0.05 \Rightarrow t_0 = \frac{|p-P_0|}{\sigma_p} = \frac{|0.05-0.04|}{0.009798} = 1.02$$

Pošto je $\mathbf{t_0 = 1.02 < 2}$, prema UKP, metode II, zaključujemo da je razlika p i P_0 slučajna, a **hipoteza o kvalitetu proizvoda dobavljača $\mathbf{P = P_0 = 4\%}$ je tačna**.

c) m = 25 $$p = \frac{m}{n} = \frac{25}{400} = 0.0625 \Rightarrow t_0 = \frac{|p-P_0|}{\sigma_p} = \frac{|0.0625-0.04|}{0.009798} = 2.30$$

Pošto je $\mathbf{2 < t_0 = 2.30 < 3}$, prema UKP, metode II, zaključujemo da je razlika p i P_0 signifikantna, ali ne i visokosignifikantna, te se za ovaj uzorak **hipoteza $\mathbf{P = P_0 = 4\%}$ ne može ni odbaciti ni prihvatiti**, već se izvlači novi uzorak pa se donosi odluka.

5. <u>JANUAR 2002, Gr1, Zad1</u>

(provera hipoteze o jednakosti proporcija elemenata dvaju osnovnih skupova na osnovu uzoraka)

Postavka:

Na trima mašinama se obrađuje dimenzija 28±0.04 mm, na radnim predmetima iz lansirane serije. U jednom obilasku kontrolor je izvlačenjem po jednog uzorka odredio:

a) među izratcima sa prve mašine: 100 dobrih i 4 loša komada,
b) među izratcima sa druge mašine: 170 dobrih i 8 loših komada,
c) među izratcima sa treće mašine: 40 dobrih i 8 loših komada.

Utvrditi na kojim se mašinama međusobno postiže statistički identičan nivo tačnosti obrade.

Rešenje:

Posmatrano svojstvo je neusaglašenost karakteristike kvaliteta 28±0.04 mm sa konstrukcionom dokumentacijom.

Najpre izračunavamo proporcije elemenata sa posmatranim svojstvom:

- na I mašini:

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{4}{104} = 0.038\,;$$

- na II mašini:

$$p_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{8}{170} = 0.045\,;$$

- na III mašini:

$$p_3 = \frac{m_3}{n_3} = \frac{8}{48} = 0.167\,;$$

gde su:

- m_i (i = 1, 2, 3) – broj izradaka sa posmatranim svojstvom na svakoj od mašina;
- n_i (i = 1, 2, 3) – ukupan broj izradaka na svakoj od mašina.

Najpre proveravamo hipotezu o jednakosti proporcija za **I i II mašinu**. Za to nam je potrebno da izračunamo sledećih nekoliko veličina:

$$\overline{p}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2} = \frac{4+8}{100+170} = 0.043 \Rightarrow \overline{q}_{12} = 1 - \overline{p}_{12} = 1 - 0.043 = 0.957\,,$$

$$s_{d12} = \sqrt{\overline{p}_{12} \cdot \overline{q}_{12} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{0.043 \cdot 0.957 \cdot \frac{104+178}{104 \cdot 178}} = 0.025\,,$$

koje su nam neophodne za izračunavanje parametra t_{012}, prema jednačini:

$$t_{012} = \frac{|p_1 - p_2|}{s_{d12}} = \frac{|0.038 - 0.045|}{0.025} = 0.28 < 2\,.$$

Pošto je izračunati parametar manji od kritične veličine $t_0^{krit.}$ = 2, zaključujemo da se <u>na mašinama I i II postiže statistički ista tačnost</u>.

Sada proveravamo hipotezu o jednakosti proporcija za **II i III mašinu**.

$$\overline{p}_{23} = \frac{m_2 + m_3}{n_2 + n_3} = \frac{8+8}{170+40} = 0.071 \Rightarrow \overline{q}_{23} = 1 - \overline{p}_{23} = 1 - 0.071 = 0.929\,,$$

$$s_{d23} = \sqrt{\overline{p}_{23} \cdot \overline{q}_{23} \cdot \frac{n_2 + n_3}{n_2 \cdot n_3}} = \sqrt{0.071 \cdot 0.929 \cdot \frac{178+48}{178 \cdot 48}} = 042 \Rightarrow t_{023} = \frac{|p_2 - p_3|}{s_{d23}} = \frac{|0.045 - 0.167|}{0.042} = 2.95 > 2\,.$$

Pošto je izračunati parametar veći od kritične veličine $t_0^{krit.}$ = 2, zaključujemo da se <u>na mašinama II i III,</u> a time, s obzirom na prethodne zaključke, <u>i na mašinama I i III, ne postiže statistički ista tačnost</u>.