Sedma auditorna vežba iz Upravljanja kvalitetom proizvoda 1

METOD STATISTIČKIH OCENA I KONTROLNE KARTE (ispitni zadaci)

1. JUN 2000, Gr2, Zad1 (*ocena tačnosti aritmetičke sredine osnovnog skupa*)

Postavka:

Prilikom ispitivanja postojanosti jedne serije alata utvrđena je aritmetička sredina $\overline{T} = 150$ min, a na osnovu tog uzorka ocenjena je i disperzija osnovnog skupa veličinom s = 4.02 min. Ako se zna da se osnovni skup pokorava zakonu normalne raspodele, odrediti veličinu uzorka, pod uslovom da se srednja postojanost alata nalazi u granicama poverenja [148÷152] min, uz pouzdanost 96%.

Rešenje:

Verovatnoća da se srednja postojanost alata (aritmetička sredina osnovnog skupa $\overline{X}$) nalazi u intervalu [148÷152], prema uslovima zadatka, iznosi 96%.

Ukoliko je veličina uzorka n < 30, tada važi:

$$P(148 < \overline{x} < 152) = 0.96 = 2S(t_p, k), \tag{1}$$

gde su:

- $t_p \equiv$ parametar Studentove raspodele (UKP M1, tab.3),
- k = n – 1 ≡ broj stepeni slobode Studentove raspodele.

Međutim, ukoliko je veličina uzorka n ≥ 30, tada važi:

$$P(148 < \overline{x} < 152) = 0.96 = 2\Phi(t), \tag{2}$$

gde su:

- $\overline{x} = \overline{T} \equiv$ aritmetička sredina uzorka,
- $t \equiv$ parametar normalne raspodele (UKP M1, tab.1).

Pošto je veličina uzorka nepoznata, a ne znamo čak ni da li je taj uzorak mali (n < 30) ili veliki (n ≥ 30), moramo da pretpostavimo jedan od ta dva slučaja. Ako pretpostavimo da je uzorak mali, onda bi nam u daljim proračunima bila potrebna još jedna veličina za određivanje t_p, a to je broj stepeni slobode k, što uz veličinu uzorka n čini dve nepoznate, a nama na raspolaganju stoji samo jedna jednačina (1) ili (2). Zato nam ne preostaje ništa drugo nego da pretpostavimo da je uzorak veliki i primenimo jednačinu (2). Dakle:

$$2\Phi(t) = 0.96 \Rightarrow t = 2.05 .$$

Dobijena vrednost parametra t nam omogućava da izračunamo tačnost aritmetičke sredine osnovnog skupa, na osnovu izvučenog uzorka:

$$\varepsilon = t\frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

koja se za odgovarjuću pouzdanost 96% može izračunati i kao polovina zadatog intervala poverenja:

$$\overline{X} \in [\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon] = [148{,}152] \Rightarrow 2\varepsilon = 152 - 148 = 4 \Rightarrow \varepsilon = 2\,\text{min}. \tag{4}$$

Sada možemo izračunati traženu veličinu uzorka, na osnovu jednačina (3) i (4):

$$t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = \varepsilon \Rightarrow n = \frac{t^2 \cdot s^2}{\varepsilon^2} = \frac{2.05^2 \cdot 4.02^2}{2^2} = 16.979 .$$

Veličinu uzorka uvek zaokružujemo na prvi veći ceo broj, pa dobijamo: **n = 17** alata.

Vidimo da izračunata vrednost obima uzorka n = 17 nije u saglasnosti sa polaznom pretpostavkom da je uzorak veliki (n ≥ 30), što nam govori da je ipak neophodno primenjivati tablice za Studentovu raspodelu. Pošto je poznato da je $t_p > t$ za n < 30 i $t_p \approx t$ za n ≥ 30, pretpostavićemo da je n = 18 i koristiti tabelu za Studentovu raspodelu (UKP M1, tab.3), iz koje, za n = 18 i k = n – 1 = 17, dobijamo:

$$2S(t_p, k) = 0.96 \Rightarrow t_p(P_{gs} = 0.96, k = 17) = 2.26 .$$

Kada tu vrednost ubacimo u jednačinu:

$$\varepsilon = t_p \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \qquad (5)$$

dobijamo:

$$n-1 = \frac{t_p^2 \cdot s^2}{\varepsilon^2} = \frac{2.26^2 \cdot 4.02^2}{2^2} = 20.64 \Rightarrow n = 21.64 \Rightarrow (\text{zaok.})\ n = 22 .$$

Vidimo da nam ni ova pretpostavka nije bila dobra, pa iterativnim postupkom dolazimo do pravog rešenja (tab.1):

TABELA 1.

Pretpostavljeni obim uzorka $n_{pret.}$	Broj stepeni slobode k	Parametar Student. rasp. t_p	Izračunati obim uzorka $n_{izr.}$	Izračunati obim uzorka $n_{izr.zaok.}$
18	17	2.26	21.64	22
19	18	2.25	21.45	22
20	19	2.24	21.27	22
21	20	2.24	21.27	22
22	21	2.23	21.09	22

Zaključujemo da je traženi obim uzorka **n = 22**.

2. JANUAR 1998, Gr1, Zad2 (*ocena tačnosti standardne devijacije osnovnog skupa*)

Postavka:

Kontrolom karakteristike kvaliteta $\varnothing 40^{+0.15}_{+0.05}$ mm dobijeni su sledeći rezultati (tabela 2):

TABELA 2.

X_i [mm]	40.06	40.07	40.08	40.09	40.10	40.11	40.12	40.13	40.14	40.15	40.16
f_i	1	1	3	6	9	11	8	5	2	2	1

a) Odrediti interval poverenja u kome se sa pouzdanošću 95% nalazi nepoznata aritmetička sredina osnovnog skupa; i

b) Odrediti tačnost ocene standardne devijacije osnovnog skupa sa pouzdanošću 99.5%, odnosno granice intervala poverenja u kojem je sa sigurnošću 99.5% sadržana standardna devijacija osnovnog skupa.

Rešenje:

a) Najpre izračunavamo aritmetičku sredinu i disperziju uzorka, pomoću tabele:

TABELA 3.

x_i	f_i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$	$(x_i - a)\cdot f_i$	$(x_i - a)^2\cdot f_i$
40.06	1	-0.05	0.0025	-0.05	0.0025
40.07	1	-0.04	0.0016	-0.04	0.0016
40.08	3	-0.03	0.0009	-0.09	0.0027
40.09	6	-0.02	0.0004	-0.12	0.0024
40.10	9	-0.01	0.0001	-0.09	0.0009
a = 40.11	11	0	0	0	0
40.12	8	0.01	0.0001	0.08	0.0008
40.13	5	0.02	0.0004	0.10	0.0020
40.14	2	0.03	0.0009	0.06	0.0018
40.15	2	0.04	0.0016	0.08	0.0032
40.16	1	0.05	0.0025	0.05	0.0025
Σ	**49**		**0.0110**	**-0.02**	**0.0204**

Veličina $\mathbf{f_i}$ u tabeli 3 predstavlja empirijske frekvencije dobijene na osnovu tabele u postavci zadatka, a veličina **a** predstavlja karakteristiku sa najvećom frekvencijom.

Dobijamo sledeće vrednosti aritmetičke sredine i disperzije:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\cdot f_i = 40.11 - \frac{1}{49}\cdot 0.02 \approx 40.1096 \text{ mm}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \cdot f_i - (\bar{x} - a)^2} = \sqrt{\frac{1}{49}\cdot 0.0204 - (40.1096 - 40.11)^2} \approx 0.0204 \text{ mm}$$

Nepoznatu vrednost aritmetičke sredine osnovnog skupa ocenjujemo na sledeći način:

$$\bar{X} \approx \bar{x} = 40.1096 \text{ mm},$$

a standardne devijacije osnovnog skupa preko obrasca:

$$s = \sigma = 0.0204 \text{ mm}.$$

Pošto je obim uzorka n > 30, koristimo tablice za normalnu raspodelu i jednačinu statističke pouzdanosti pišemo u obliku:

$$P(\bar{x} - t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \bar{x} + t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = 0.95\,.$$

Odatle sledi: t = 1.96 (UKP M1, tab.1). Na osnovu ovoga dobijamo granice intervala:

$$\bar{x} - t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} = 40.1096 - 1.96\cdot\frac{0.0204}{\sqrt{49}} \approx 40.1039 \text{ mm},$$

$$\bar{x} + t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} = 40.1096 + 1.96\cdot\frac{0.0204}{\sqrt{49}} \approx 40.1153 \text{ mm}.$$

Dakle, aritmetička sredina osnovnog skupa će se nalaziti u intervalu poverenja [40.1039, 40.1153] mm, sa pouzdanošću 95%.

b) Veličinom s = 0.0206 procenjuje se nepoznata standardna devijacija osnovnog skupa, koja se mora nalaziti u granicama $\sigma_O = s \pm \varepsilon$, gde ε predstavlja tačnost ocene standardne devijacije osnovnog skupa. Za k = n – 1 = 49 –1 = 48 i P_L = 0.995, prema UKP M1, tab.4, dvostrukom interpolacijom dobijamo vrednost veličine q_s = 0.3718, tako da je tačnost ε približne jednačine σ_O = s jednaka:

$$\varepsilon = q_s \cdot s = 0.3718 \cdot 0.0204 = 0.0076 \text{ mm}.$$

Prema tome, sa pouzdanošću 99.5% se može tvrditi da će se nepoznata vrednost standardne devijacije σ_O osnovnog skupa nalaziti u granicama intervala:

$$0.0204 - 0.0076 < \sigma_O < 0.0204 + 0.0076\,,$$

$$0.0128 < \sigma_O < 0.0280\,;$$

odnosno:

$$\sigma_O = s \pm \varepsilon = 0.0204 \pm 0.0076 \text{ mm}.$$

3. APRIL 2001, Gr1, Zad1 (*kontrolne karte za % defektnih delova; ocena stand. dev. dvoslojnog skupa*)

Postavka:

U jednoj fabrici je izvršena kontrola karakteristika kvaliteta nekog obradnog procesa na jednomesečnom obimu proizvodnje. Svakog radnog dana je izvučen po jedan uzorak. Dobijeni rezultati su prikazani u tabeli 4. Potrebno je:

a) Konstruisati kontrolne karte za procenat defektnih delova. Tokom narednih kontrola pomenutog obradnog procesa usvojena je prosečna veličina uzorka iz prethodnih kontrola; i

b) Odrediti verovatnoću da u čitavoj seriji delova napravljenih tog meseca neće biti više od 5% defektnih delova.

TABELA 4.

RB	Veličina uzorka	Broj loših delova	RB	Veličina uzorka	Broj loših delova	RB	Veličina uzorka	Broj loših delova	RB	Veličina uzorka	Broj loših delova	RB	Veličina uzorka	Broj loših delova
1.	841	22	6.	2161	83	11.	2094	96	16.	955	45	21.	1094	54
2.	1490	63	7.	2033	65	12.	1737	81	17.	887	37	22.	1969	93
3.	1465	57	8.	2099	59	13.	1414	51	18.	1116	39	23.	1851	81
4.	1291	35	9.	1975	40	14.	1766	47	19.	1546	48	24.	1813	68
5.	1815	78	10.	1823	66	15.	1981	36	20.	1339	36	25.	1481	59

Rešenje:

a) U prvom delu zadatka se traži da se kontroliše procenat defektnih delova u uzorku; dakle, crtamo p-karte. U tu svrhu će nam poslužiti sledeća tabela:

TABELA 5.

RB uzorka	n_i	broj defektnih delova	p_i [%]	Δp_{bar} [%]	$DKGp_{bar}$ [%]	$GKGp_{bar}$ [%]
1.	841	22	2.616	1.926	1.669	5.520
2.	1490	63	4.228	1.447	2.148	5.041
3.	1465	57	3.891	1.459	2.135	5.053
4.	1291	35	2.711	1.554	2.040	5.149
5.	1815	78	4.298	1.311	2.284	4.905
6.	2161	83	3.841	1.201	2.393	4.796
7.	2033	65	3.197	1.239	2.356	4.833
8.	2099	59	2.811	1.219	2.375	4.813
9.	1975	40	2.025	1.257	2.338	4.851
10.	1823	66	3.620	1.308	2.286	4.902
11.	2094	96	4.585	1.220	2.374	4.815
12.	1737	81	4.663	1.340	2.254	4.934
13.	1414	51	3.607	1.485	2.109	5.079
14.	1766	47	2.661	1.329	2.265	4.923
15.	1981	36	1.817	1.255	2.340	4.849
16.	955	45	4.712	1.807	1.787	5.401
17.	887	37	4.171	1.875	1.719	5.469
18.	1116	39	3.495	1.672	1.923	5.266
19.	1546	48	3.105	1.420	2.174	5.015
20.	1339	36	2.689	1.526	2.068	5.120
21.	1094	54	4.936	1.688	1.906	5.283
22.	1969	93	4.723	1.259	2.336	4.853
23.	1851	81	4.376	1.298	2.296	4.892
24.	1813	68	3.751	1.312	2.283	4.906
25.	1481	59	3.984	1.451	2.143	5.045
	40036		90.513			

Centralne linije i kontrolne granice u prethodnoj tabeli su dobijene na osnovu sledećih obrazaca:

- centralna linija:

$$CL_p = \overline{p} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} p_i = \frac{90.513}{25} = 3.621\,\%$$

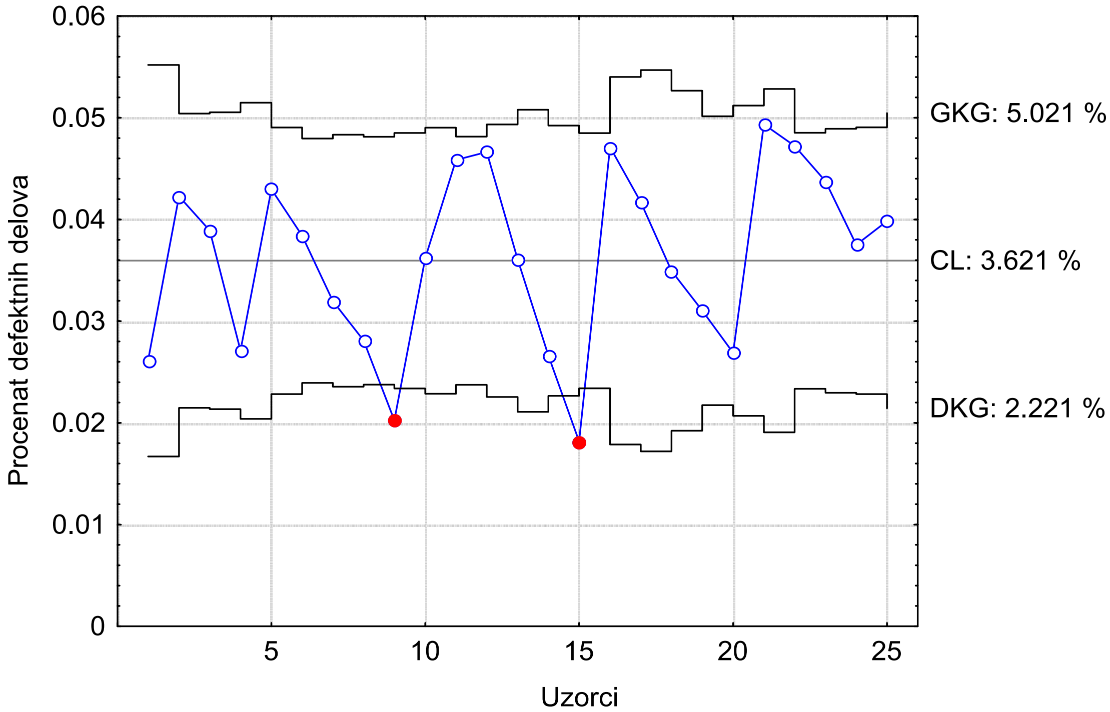
- gornja kontrolna granica:

$$GKG_{\bar{p}} = \bar{p} + \Delta\bar{p} = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(100-\bar{p})}{n_i}} = 3.621 + 3\sqrt{\frac{3.621\cdot(100-3.621)}{n_i}} = 3.621 + \frac{56.044}{\sqrt{n_i}}\ \%$$

- gornja kontrolna granica:

$$DKG_{\bar{p}} = \bar{p} - \Delta\bar{p} = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(100-\bar{p})}{n_i}} = 3.621 - 3\sqrt{\frac{3.621\cdot(100-3.621)}{n_i}} = 3.621 - \frac{56.044}{\sqrt{n_i}}\ \%$$

Na osnovu dobijenih podataka crtamo kontrolnu p-kartu za protekli proces (slika 1.)



Slika 1. *Kontrolna p-karta za protekli proces*

Sa kontrolne karte za protekli proces vidi se da su tačke 9 i 15 prekoračile donju kontrolnu granicu, a to označava povišen kvalitet, tako da se one ne eliminišu i protekli proces se smatra stabilnim i tačnim.

Dakle, zadovoljeni su uslovi za crtanje kontrolne p-karte za tekući proces. Prema uslovu zadatka, za sve naredne kontrole će relevantan biti prosečan obim uzorka iz prethodnih ispitivanja, koji iznosi:

$$n = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} n_i = \frac{1}{25}\cdot 40036 = 1601.44 \approx 1602\,.$$

Sledi izračunavanje kontrolnih vrednosti za p-kartu za tekuće procese.

- Reprezentativna vrednost procenta defektnih delova:

$$p_r = \bar{p} = 3.621\,\%$$

- Centralna linija:

$$CL_{\bar{p}}(tek.) = p' = p_r = 3.621\,\%$$

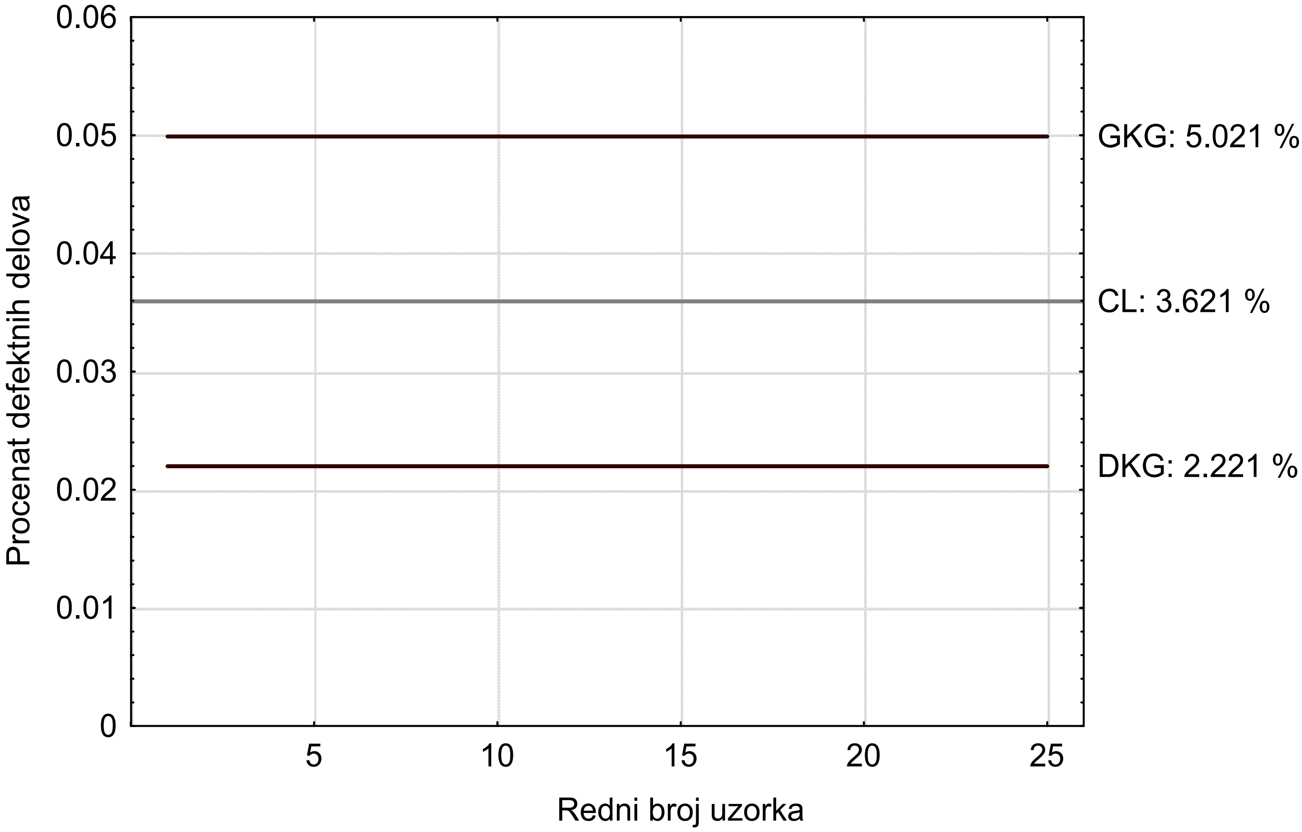
- Gornja kontrolna granica (za n = 1602):

$$GKG_{\bar{p}}(tek.) = p' + 3\sqrt{\frac{p'(100-p')}{n}} = 3.621 + 3\sqrt{\frac{3.621\cdot(100-3.621)}{1602}} = 5.021\,\%$$

- Donja kontrolna granica (za n = 1602):

$$DKG_{\bar{p}}(tek.) = p' - 3\sqrt{\frac{p'(100-p')}{n}} = 3.621 - 3\sqrt{\frac{3.621\cdot(100-3.621)}{1602}} = 2.221\,\%$$

Sada možemo nacrtati i kontrolnu p-kartu za tekući proces (slika 2).



Slika 2. *Kontrolna p-karta za tekući proces*

b) U drugom delu zadatka je potrebno izračunati verovatnoću da u čitavoj seriji delova izrađenoj tog meseca neće biti više od 5 % defektnih delova. Pošto se ovde radi o dvoslojnom skupu (u njemu postoje samo ispravni i defektni delovi), koristimo odgovarajući obrazac za ocenu standardne devijacije osnovnog skupa:

$$s_p = \sqrt{\frac{p_r \cdot (100 - p_r)}{n}} = \sqrt{\frac{3.621 \cdot (100 - 3.621)}{1602}} = 0.467\ \%\,.$$

Tražena verovatnoća se izračunava iz sledećeg sistema jednačina:

$$P(p_o < 5\ \%) = 0.5 + \phi(t),\ \text{i}$$

$$p_r + t \cdot s_p = 5\ \%\,.$$

Iz druge jednačine dobijamo:

$$3.621 + t \cdot 0.467 = 5$$

$$t = \frac{5 - 3.621}{0.467} = 2.953$$

Kad dobijenu vrednost parametra t unesemo u prvi uslov, dobijamo:

$$P(p_o < 5\ \%) = 0.5 + \phi(t) = 0.5 + 0.498425 = 0.998425\,.$$

Dakle, tražena verovatnoća iznosi 99.84 %.