KATEDRA ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA (0109)
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA I (0117)

JUN 2001. god.

I i II grupa

PISMENI ISPIT

1. Na mašinskom delu koji se serijski izrađuje kontroliše se spoljašnja mera x = $75^{+0.050}$ mm, za koju je izvučeno 25 uzoraka sa po 9 primeraka u uzorku. Kontrolom su dobijene sledeće vrednosti statističkih parametara (tabela 1):

TABELA 1

RB	$\overline{x}$ [mm]	Mera rasipanja [mm]	RB	$\overline{x}$ [mm]	Mera rasipanja [mm]	RB	$\overline{x}$ [mm]	Mera rasipanja [mm]	RB	$\overline{x}$ [mm]	Mera rasipanja [mm]	RB	$\overline{x}$ [mm]	Mera rasipanja [mm]
1.	75.030	0.014	6.	75.030	0.012	11.	75.038	0.034	16.	75.041	0.030	21.	75.035	0.016
2.	75.038	0.031	7.	75.038	0.023	12.	75.034	0.030	17.	75.034	0.022	22.	75.038	0.010
3.	75.029	0.013	8.	75.040	0.013	13.	75.038	0.021	18.	75.040	0.029	23.	75.040	0.019
4.	75.039	0.029	9.	75.020	0.012	14.	75.030	0.022	19.	75.029	0.034	24.	75.039	0.018
5.	75.040	0.022	10.	75.038	0.022	15.	75.038	0.027	20.	75.039	0.028	25.	75.040	0.016

Potrebno je, uz davanje odgovarajućih komentara:

a) Testirati hipotezu o postojanju grube greške u elementima datog empirijskog skupa, za nivo značajnosti q = 1%;

b) Formirati odgovarajuće kontrolne karte procesa obrade i, uzevši u obzir rezultate dobijene u okviru tačke (a), izvesti zaključke o njegovoj stabilnosti i tačnosti.

c) Grafički predstaviti odnos zadatog i prirodnog intervala tolerancije. Odrediti procentualnu veličinu eventualnog škarta.

2. Anketiranjem 100 vlasnika automobila dobijene su njihove prosečne dnevne potrošnje benzina (tabela 2):

TABELA 2

Potrošnja benzina [lit.]	0 do 2	2 do 4	4 do 6	6 do 8	8 do 10	10 do 12	12 do 14
Broj anketiranih	5	10	20	30	15	14	6

(a) Skicirati histogram empirijske raspodele. Kojom teorijskom raspodelom može da se aproksimira empirijska raspodela? Verifikovati postavljenu hipotezu hi-kvadrat testom.

(b) Intervalno proceniti srednju vrednost aritmetičke sredine osnovnog skupa uz pouzdanost 99.73 %.

PRVA I DRUGA GRUPA

1. ZADATAK

a) Testiranje hipoteze o postojanju grube greške u elementima empirijskog skupa

U prvom delu ovog zadatka je potrebno proveriti hipotezu o postojanju grube greške u elementima empirijskog skupa u slučaju kada parametri lokacije i standardne devijacije osnovnog skupa nisu poznati. Zato je neophodno najpre proceniti parametre osnovnog skupa na osnovu izvučenih k = 25 uzoraka.

Aritmetičku sredinu osnovnog skupa procenjujemo aritmetičkom sredinom aritmetičkih sredina uzoraka:

$$\overline{X} = \overline{\overline{x}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i = \frac{1}{25}\cdot 1875.895 = 75.0358 \text{ mm.}$$

Pošto je obim uzorka (9 primeraka u uzorku) manji od 10, zaključujemo da je zadata mera rasipanja raspon R, pa standardnu devijaciju osnovnog skupa ocenjujemo na sledeći način:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot\sigma = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{\overline{R}}{d_2} = \sqrt{\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{1}{d_2}\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}R_i$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{25}{(25-1)}}\cdot\frac{1}{2.970}\cdot\frac{1}{25}\cdot 0.547 = 0.00752 \text{ mm.}$$

Napomene:

- Pošto je broj uzoraka manji od 31, koristimo popravljenu ocenu standardne devijacije osnovnog skupa.
- Ovde sa $\overline{X}$ i σ_0 obeležavamo ocene aritmetičke sredine i standardne devijacije osnovnog skupa.
- Koeficijent d_2 određujemo prema UKP M2, tab.14, za obim uzorka n = 9.
- Standardna devijacija osnovnog skupa se mogla oceniti i preko definicione jednačine za standardnu devijaciju uzorka, uz uvođenje popravke jer se radi o malom broju uzoraka (manji od 31):

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{k-1}\cdot\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i-\overline{\overline{x}})^2} = \sqrt{\frac{1}{25-1}\cdot\sum_{i=1}^{25}(\overline{x}_i-75.0358)^2} = \sqrt{\frac{1}{25-1}\cdot 0.00063} = 0.00512 \text{ mm.}$$

  Da se ovde radi o rezultatima prirodnog procesa a ne o izmišljenom zadatku, ove dve vrednosti bi trebalo da budu približno jednake, što ovde, očigledno, nije slučaj. U svakom slučaju, oba rešenja se mogu priznati kao tačna.

Postavljamo hipotezu da elementi empirijskog skupa (za koji pretpostavljamo da podleže zakonu normalne raspodele), ne sadrže grubu grešku. Vrednost koja najviše odstupa od procenjene aritmetičke sredine osnovnog skupa je minimalna od svih vrednosti aritmetičkih sredina pojedinačnih uzoraka, koja iznosi $\overline{X}_{min}$ = 75.020 mm. Nju upoređujemo sa kritičnom granicom $\mathbf{u_q}$, koja se u slučaju kada parametri osnovnog skupa nisu poznati, već procenjeni, izračunava prema obrascu:

$$u_q = \overline{X} - g_q\cdot\sigma_0 = 75.0358 - 3.071\cdot 0.00752 = 75.0127 \text{ mm,}$$

pri čemu se parametar g_q uzima prema UKP M2, tab.12, za zadati nivo značajnosti 1% i veličinu uzorka k = 25 (napomena: ovde se pojedini uzorci dati u tabeli u postavci zadatka tretiraju kao elementi u ukupnom uzorku).

Pošto je $\overline{x}_{min} > u_q$ zaključujemo da se nulta hipoteza ne sme odbaciti, tj. elementi empirijskog skupa ne sadrže u sebi grubu grešku.

Napomena: Studenti koji su izračunavali standardnu devijaciju preko definicionog obrasca dobijaju:

$$u_q = \overline{X} - g_q\cdot\sigma_0 = 75.0358 - 3.071\cdot 0.00512 = 75.02008$$

tako da bi u tom slučaju morali da izvedu zaključak da elementi empirijskog skupa u sebi sadrže grubu grešku jer je $\overline{x}_{min}$ = 75.020 < u_q.

b) Kontrolne karte, stabilnost i tačnost procesa obrade

Pošto je veličina uzoraka k = 9 < 10, zaključujemo da mera rasipanja predstavlja raspon, pa crtamo $\overline{x}$ R kontrolne karte. Izračunavamo gornju i donju kontrolnu granicu, kao i centralne linije za aritmetičku sredinu i raspon:

$$CL_{\bar{x}} = \overline{X} = \overline{\overline{x}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i = \frac{1}{25}\cdot 1875.895 = 75.0358\ \text{mm},$$

$$CL_R = \overline{R} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}R_i = \frac{1}{25}\cdot 0.547 = 0.02188\ \text{mm},$$

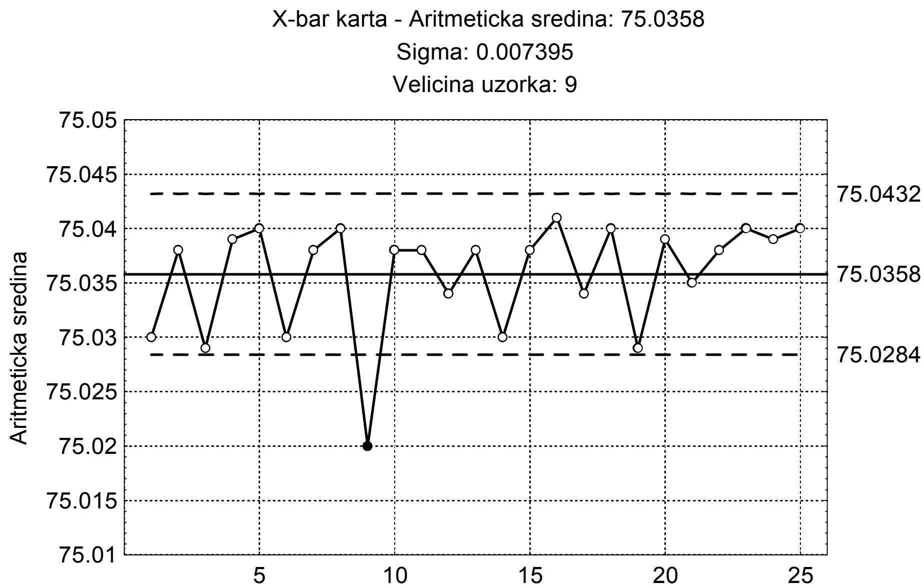
$$GKG_{\bar{x}} = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R} = 75.0358 + 0.337\cdot 0.02188 = 75.0432\ \text{mm},$$

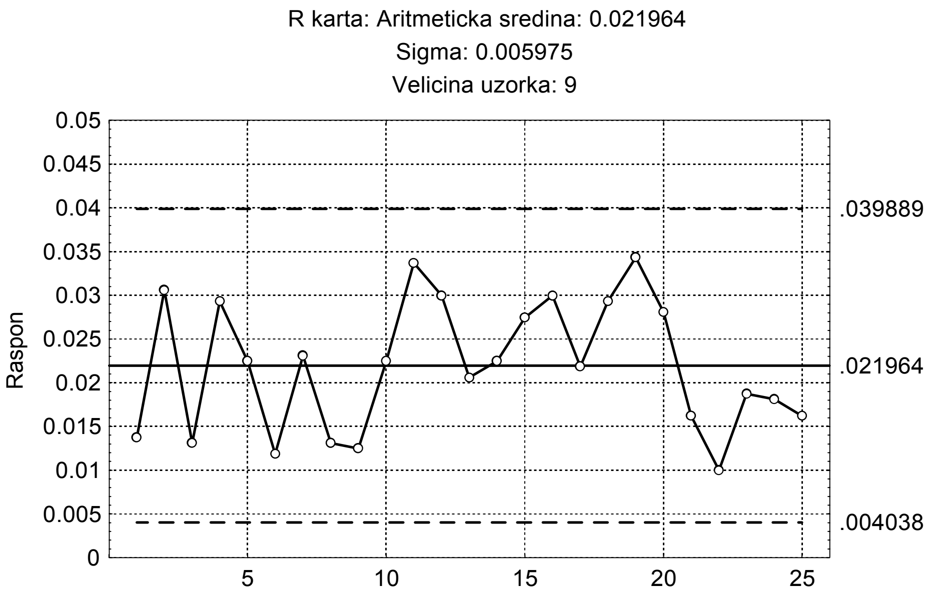
$$DKG_{\bar{x}} = \overline{\overline{x}} - A_2\overline{R} = 75.0358 - 0.337\cdot 0.02196 = 75.0284\ \text{mm},$$

$$GKG_R = D_4\overline{R} = 1.816\cdot 0.02188 = 0.0397\ \text{mm},$$

$$DKG_R = D_3\overline{R} = 0.184\cdot 0.02188 = 0.0040\ \text{mm},$$

što nam omogućava da nacrtamo kontrolne karte:





Vidimo da je na x-bar kontrolnoj karti tačka sa rednim brojem 9, kojoj odgovara aritmetička sredina $\overline{X}_{min}$ = 75.020 mm, ispala van kontrolnih granica. Ukoliko se radi o gruboj grešci, mi bi mogli da pretpostavimo da su njeni uzroci otklonjeni iz procesa i da protekli proces smatramo stabilnim. Međutim, mi smo u delu zadatka pod (a) dokazali suprotno, to jest da nema grube greške u elementima empirijskog skupa. Na osnovu ovih razmatranja zaključujemo: protekli proces je bio NESTABILAN. Samim tim zaključujemo da je on bio i netačan, pa ne crtamo kontrolne karte za tekući proces.

Napomena: oni koji su standardnu devijaciju računali preko definicionog obrasca, morali su dobiti zaključke suprotne od malopre navedenih (ima grube greške, protekli proces je bio stabilan).

c) Analiza tačnosti i veličine škarta

Zadata tolerancija procesa iznosi:

$$T = x_g - x_d = 0.050 - 0 = 0.050 \text{ mm.}$$

Prirodnu toleranciju procesa računamo prema obrascu:

$$T_p = 6\sigma = 6 \cdot 0.00752 = 0.0451 \text{ mm.}$$

Koeficijent tačnosti procesa iznosi:

$$\mu_1 = \frac{T_p}{T} = \frac{0.0453}{0.050} = 0.906 < 1,$$

na osnovu čega zaključujemo da je prvi uslov tačnosti ispunjen.

Koeficijent tačnosti regulisanja:

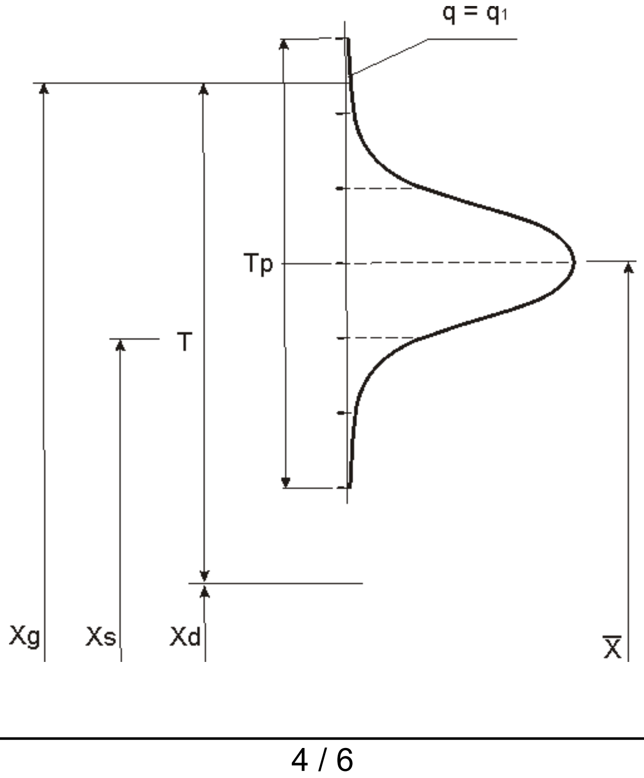
$$x_s = \frac{x_g - x_d}{2} = \frac{75.050 + 75}{2} = 75.025\,\text{mm},$$

$$\mu_2 = \frac{\left|\overline{X} - x_s\right|}{T} = \frac{\left|75.0358 - 75.025\right|}{0.05} = 0.216\,\text{mm},$$

je veći od dozvoljenog:

$$\mu_{2d} = \frac{1-\mu_1}{2} = \frac{1-0.906}{2} = 0.047 < 0.216\,,$$

na osnovu čega zaključujemo da drugi uslov tačnosti nije ispunjen, što se grafički može predstaviti kao na sledećoj slici.



Procenat delova kod kojih se ispitivana karakteristika nalazi iznad maksimalne dozvoljene granice računa se prema obrascu:

$$q_1 = 0.5 - \Phi\left(\frac{x_g - \overline{X}}{\sigma_0}\right) = 0.5 - \Phi\left(\frac{75.050 - 75.0358}{0.00752}\right) = 0.5 - \Phi(1.888) = 0.5 - 0.4705 = 0.0295$$

$$q_1 = 2.95\ \%$$

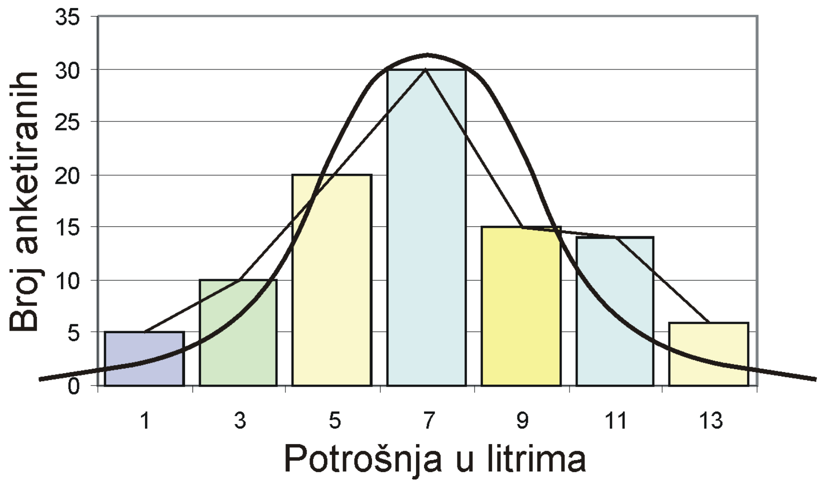
i ovi se delovi, kod spoljašnjih mera, mogu doraditi.

Procenat delova kod kojih se ispitivana karakteristika nalazi ispod minimalne dozvoljene granice, prema prethodnoj slici, može se smatrati jednakim nuli.

2. ZADATAK

a) Postavljanje i provera hipoteze o empirijskoj raspodeli

Na osnovu podataka dobijenih u postavci zadatka dobijamo sledeći histogram:



zaključujemo da se verovatno radi o normalnoj raspodeli. Dakle, postavljamo hipotezu da empirijski skup ima normalnu raspodelu. Hipotezu verifikujemo hi-kvadrat testom.

Najpre je potrebno izračunati aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju. Za to nam je potrebna sledeća tablica (za obeležje intervala uzimamo njegovu sredinu):

interval	x_i	f_i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$	$(x_i - a)\cdot f_i$	$(x_i - a)^2\cdot f_i$
0 do 2	1	5	-6	36	-30	180
2 do 4	3	10	-4	16	-40	160
4 do 6	5	20	-2	4	-40	80
6 do 8	a = 7	30	0	0	0	0
8 do 10	9	15	2	4	30	60
10 do 12	11	14	4	16	56	224
12 do 14	13	6	6	36	36	216
				Σ	**12**	**920**

Karakteristika sa najvećom frekvencijom: a = 7.

Aritmetičku sredinu dobijamo prema:

$$\overline{x} = a + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)\cdot f_i\right] = 7 + \frac{1}{100}\cdot 12 = 7.12\,,$$

a standardnu devijaciju prema:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\cdot f_i\right] - (\overline{x} - a)^2} = \sqrt{\frac{1}{100}\cdot 920 - (7.12 - 7)^2} = 3.031.$$

Provera hipoteze o normalnosti osnovnog skupa pomoću χ^2-testa, vrši se prema sledećoj tabeli:

r.br.	x_i [mm]	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$t = \frac{\lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\sigma}$	$\varphi(t)$	$f_t = \frac{d \cdot n}{\sigma} \cdot \varphi(t)$	f_e	$\lvert f_e - f_t \rvert$	$\frac{\lvert f_e - f_t \rvert^2}{f_t}$
1.	1	6.12	2.019	0.052	3.428	5	1.572	0.721
2.	3	4.12	1.359	0.158	10.451	10	0.451	0.019
3.	5	2.12	0.699	0.312	20.612	20	0.612	0.018
4.	7	0.12	0.040	0.399	26.304	30	3.696	0.519
5.	9	1.88	0.620	0.329	21.718	15	6.718	2.078
6.	11	3.88	1.280	0.176	11.602	14	2.398	0.496
7.	13	5.88	1.940	0.061	4.010	6	1.990	0.988
				Σ	98.125	100	χ^2=	4.839

Teorijske frekvencije su izračunate pomoću izraza: $f_t = \frac{d \cdot n}{\sigma} \cdot \varphi(t)$, gde su:

- d = 2 ≡ širina grupnog intervala, i
- n = 100 ≡ ukupan broj uzoraka.

Kao krajnji rezultat proračuna dobija sę: χ^2= 4.839.

Kod normalnog teorijskog rasporeda, broj stepeni slobode je definisan opštim izrazom: k = n – 3 = 7 – 3 = 4, gde je n ≡ broj grupnih intervala. Brojka 3 pri proračunu označava da imamo tri dodatna uslova: Σf_e = 100, $\bar{x}$ = 7.12 , i σ = 3.031.

Prema UKP2, tab.VIII, str.243, za k = 4, dobijamo:

- P(4.878) = 0.30, i
- P(3.357) = 0.50,

pa pošto je 3.357 < 4.839 < 4.878, tačnu vrednost verovatnoće dobijamo interpolacijom i ona iznosi:

P(4.839) = 0.3051.

Dobijena verovatnoća P(4.839) = 0.3051, koja označava da za 30.51 % može biti premašeno χ^2= 4.839, veća je od 5%, što, prema UKP2, str.90, ukazuje na to da su razlike između empirijskih i teorijskih frekvencija slučajne i da je hipoteza o normalnosti empirijskog rasporeda istinita, tj. prihvata se. Dakle, empirijski skup se podvrgava teorijskom normalnom zakonu.

<u>Napomena</u>: strogo uzev, dobijeni rezultati ne pokazuju da se hipoteza prihvata, već da se ne može odbaciti.

b) <u>Intervalna procena srednje vrednosti aritmetičke sredine osnovnog skupa</u>

Nepoznatu vrednost aritmetičke sredine osnovnog skupa ocenjujemo na sledeći način: $\bar{X} \approx \bar{x} = 7.12$ lit.,
a standardne devijacije osnovnog skupa preko obrasca:

$$s = \sigma = 3.031 \text{ lit.}$$

Pošto je obim uzorka n > 30, koristimo tablice za normalnu raspodelu i jednačinu statističke pouzdanosti pišemo u obliku:

$$P(\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = 0.9973 .$$

Odatle sledi: t = 3 (UKP M1, tab.1). Na osnovu ovoga dobijamo granice intervala:

$$\bar{x} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 7.12 - 3 \cdot \frac{3.031}{\sqrt{100}} \approx 6.2107 \text{ lit.},$$

$$\bar{x} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 7.12 + 3 \cdot \frac{3.031}{\sqrt{100}} \approx 8.0293 \text{ lit.}$$

Dakle, aritmetička sredina osnovnog skupa će se nalaziti u intervalu poverenja [6.21, 8.03] mm, sa pouzdanošću 99.73%.