KATEDRA ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO **FEBRUAR 2005. god.**
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA (0109)
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA I (0117) **I grupa**

# PISMENI ISPIT

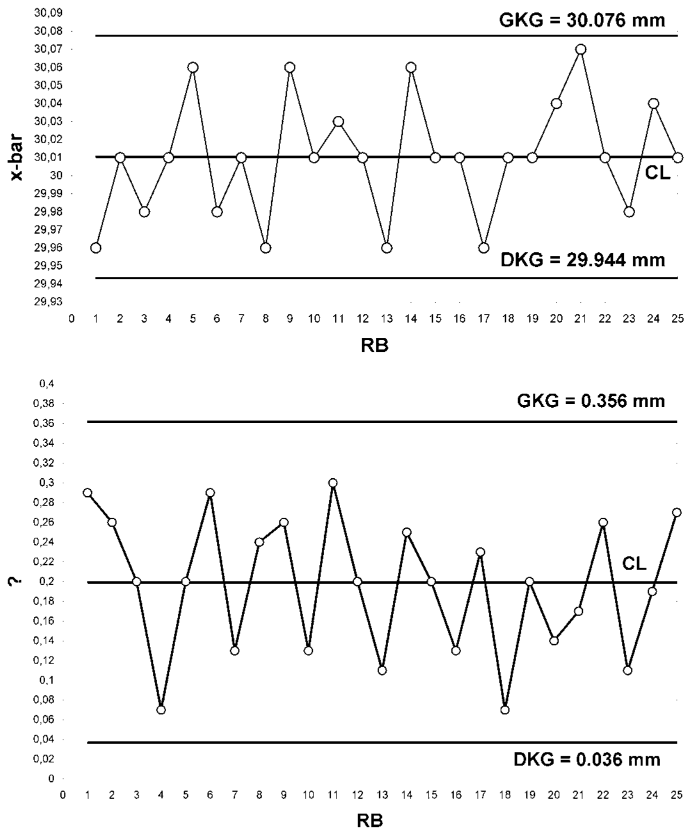
**1.** Nakon bušenja 81 rupe istom burgijom, izmerene su vrednosti prečnika, date tabelom 1. Potrebno je skicirati histogram empirijske raspodele uzorka i proveriti hipotezu o normalnosti osnovnog skupa pomoću **λ**-testa. Radi lakšeg proračuna statističkih parametara grupisati empirijske rezultate u sedam intervala iste širine, gde su granice prvog od njih [40.245-40.275]. Ekstremne vrednosti prečnika rupa, manje od najmanjeg ili veće od najvećeg intervala uključiti u odgovarajuće krajnje intervale.

Tabela 1.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40.25 | 40.32 | 40.28 | 40.43 | 40.35 | 40.37 | 40.27 | 40.34 | 40.34 |
| 40.33 | 40.36 | 40.46 | 40.35 | 40.45 | 40.33 | 40.40 | 40.43 | 40.39 |
| 40.39 | 40.32 | 40.35 | 40.35 | 40.33 | 40.34 | 40.34 | 40.36 | 40.32 |
| 40.33 | 40.33 | 40.34 | 40.41 | 40.31 | 40.29 | 40.40 | 40.35 | 40.36 |
| 40.30 | 40.34 | 40.38 | 40.38 | 40.31 | 40.35 | 40.30 | 40.33 | 40.30 |
| 40.32 | 40.35 | 40.33 | 40.36 | 40.34 | 40.31 | 40.41 | 40.37 | 40.32 |
| 40.37 | 40.36 | 40.29 | 40.34 | 40.28 | 40.36 | 40.35 | 40.38 | 40.30 |
| 40.40 | 40.31 | 40.39 | 40.42 | 40.44 | 40.42 | 40.31 | 40.34 | 40.34 |
| 40.37 | 40.32 | 40.30 | 40.30 | 40.37 | 40.34 | 40.37 | 40.41 | 40.36 |

**2.** Na slučajnom uzorku od 200 elemenata izmereni su prečnici plastičnih kuglica izrađenih injekcionim ubrizgavanjem i dobijene su sledeće vrednosti parametara lokacije i disperzije: 8.24 mm i 0.1764 mm$^2$. Prodavac tvrdi da na nivou tehničke tačnosti ±3σ, srednja vrednost prečnika kuglica u ukupnoj izrađenoj seriji ne odstupa više od 80 μm od nominalne vrednosti prečnika kuglice, koja iznosi d = 8.25 mm. Proveriti tačnost te tvrdnje.

**3.** Na jednom strugu izrađuje se karakteristika kvaliteta d = 30 mm. Nakon obrade prethodne serije delova izvučeno je 25 uzoraka sa po 9 elemenata. Konstruisane su kontrolne karte za protekli proces (slika 1) i utvrđeno je da je protekli proces bio stabilan i granično tačan. Koji parametar disperzije analizira prikazana kontrolna karta? Kolike su tolerancijske granice za datu karakteristiku kvaliteta?




*Slika 1: KKP.*

# R E Š E N J A

## 1. ZADATAK (*Lambda-test*)

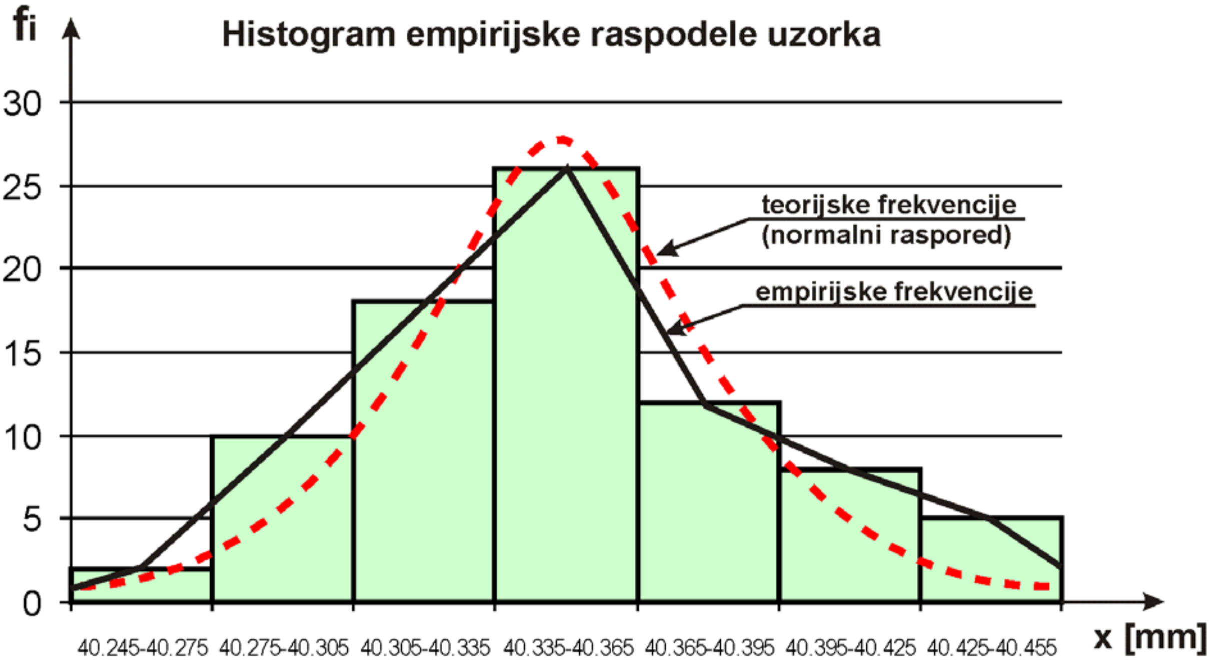
### a) Histogram empirijske raspodele uzorka

Nakon prebrojavanja koliko vrednosti karakteristike kvaliteta ima u svakom intervalu, dobijamo rezultate prikazane tabelom 2 (vrednost 40.46 pridodajemo intervalu [40. 425-40. 455]).

***Tabela 2.***

| **interval** | 40.245-40.275 | 40.275-40.305 | 40.305-40.335 | 40.335-40.365 | 40.365-40.395 | 40.395-40.425 | 40.425-40.455 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **$x_i$ [mm]** | 40.26 | 40.29 | 40.32 | 40.35 | 40.38 | 40.41 | 40.44 |
| **$f_i$** | 2 | 10 | 18 | 26 | 12 | 8 | 5 |

Histogram empirijske raspodele uzorka prikazan je na slici 1. Na osnovu oblika krive raspodele empirijskih frekvencija može se pretpostaviti da se uzorak pokorava normalnom zakonu raspodele.




***Slika 1.*** *Histogram empirijske raspodele uzorka.*

### b) Provera hipoteze o normalnosti osnovnog skupa na osnovu datog uzorka pomoću λ-testa

Da bismo odredili vrednosti parametara lokacije i disperzije uzorka, koristimo tabelu 3.

***Tabela 3.*** *Pomoćna tabela za izračunavanje računskih vrednosti arit. sredine i stand. devijacije.*

| redni broj | $x_i$ [mm] | $f_i$ | $x_i - a$ | $(x_i - a)^2$ | $(x_i - a)\cdot f_i$ | $(x_i - a)^2\cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 40.26 | 2 | -0.09 | 0.0081 | -0.18 | 0.0162 |
| 2. | 40.29 | 10 | -0.06 | 0.0036 | -0.6 | 0.036 |
| 3. | 40.32 | 18 | -0.03 | 0.0009 | -0.54 | 0.0162 |
| 4. | 40.35 | 26 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5. | 40.38 | 12 | 0.03 | 0.0009 | 0.36 | 0.0108 |
| 6. | 40.41 | 8 | 0.06 | 0.0036 | 0.48 | 0.0288 |
| 7. | 40.44 | 5 | 0.09 | 0.0081 | 0.45 | 0.0405 |
| | **Σ** | 81 | | **Σ** | -0.03 | 0.1485 |

gde je: a = 40.35 mm ≡ vrednost karakteristike kvaliteta sa najvećom frekvencijom.

Računsku vrednost aritmetičke sredine uzorka dobijamo prema sledećem obrascu:

$$\overline{x} = a + \frac{1}{n}\left[\Sigma\left(x_i - a\right)\cdot f_i\right] = 40.35 + \frac{1}{81}\cdot\left(-0.03\right) = 40.3496\,\text{mm},$$

a standardnu grešku prema:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\cdot\left[\Sigma(x_i - a)^2 f_i\right] - \left(\overline{x} - a\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{81}\cdot 0.1485 - \left(40.3496 - 40.35\right)^2} = 0.0428\,\text{mm}.$$

Provera hipoteze o normalnosti osnovnog skupa pomoću λ-testa, vrši se prema tabeli 1.5:

***Tabela 1.5.*** *Pomoćna tabela za primenu λ-testa.*

| r.br. | $x_i$ [mm] | $\lvert x_i - \overline{x}\rvert$ | $t = \frac{\lvert x_i - \overline{x}\rvert}{\sigma}$ | $\varphi(t)$ | $f_t = \frac{d\cdot n}{\sigma}\cdot\varphi(t)$ | $f_e$ | $N_e$ | $N_t$ | $\lvert N_e - N_t\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 40.26 | 0.0896 | 2.09346 | 0.04459 | 2.53169 | 2 | 2 | 2.53169 | 0.53169 |
| 2. | 40.29 | 0.0596 | 1.39252 | 0.15130 | 8.59009 | 10 | 12 | 11.12178 | 0.87822 |
| 3. | 40.32 | 0.0296 | 0.69159 | 0.31409 | 17.83250 | 18 | 30 | 28.95428 | 1.04572 |
| 4. | 40.35 | 0.0004 | 0.00935 | 0.39892 | 22.64924 | 26 | 56 | 51.60351 | 4.39649 |
| 5. | 40.38 | 0.0304 | 0.71028 | 0.31000 | 17.60039 | 12 | 68 | 69.20390 | 1.20390 |
| 6. | 40.41 | 0.0604 | 1.41121 | 0.14739 | 8.36793 | 8 | 76 | 77.57182 | 1.57182 |
| 7. | 40.44 | 0.0904 | 2.11215 | 0.04287 | 2.43411 | 5 | 81 | 80.00594 | 0.99406 |
| | | | | Σ | **80.00594** | **81** | | | |

Teorijske frekvencije su izračunate pomoću izraza: $f_t = \frac{d\cdot n}{\sigma}\cdot\varphi(t)$, gde su:

- d = 0.03 ≡ širina grupnog intervala, i
- n = 81 ≡ ukupan broj uzoraka.

One mogu biti uzete i prema UKP, metode 2, tab.I, str.237, ali se računski metod više preporučuje, jer je lakši (izbegava se korišćenje interpolacije) i tačniji.

Ostale veličine korišćene u ovoj tabeli su:

- $N_e$ ≡ kumulativna empirijska frekvencija,
- $N_t$ ≡ kumulativna teorijska frekvencija.

Pošto maksimalna razlika kumulativnih empirijskih i teorijskih frekvencija iznosi:

$$\max\left\{\lvert N_e - N_t\rvert\right\} = 4.39649,$$

to se iz sledeće jednačine dobija vrednost veličine λ:

$$\lambda = \frac{\max\left\{\lvert N_e - N_t\rvert\right\}}{n}\cdot\sqrt{n} = \frac{4.39649}{81}\cdot\sqrt{81} = 0.48850$$

Prema UKP, metode 2, tab.VII, str.242, interpolacijom dobijamo:

P(λ) = P(0.48850) = 0.9693.

Pošto je P(λ) =0.9693 očigledno veće od 0.6 (videti UKP, metode 2, str.87), to se hipoteza o normalnosti osnovnog skupa može smatrati istinitom, odnosno normalni empirijski skup pripada modelu normalne raspodele. Strogo uzevši, dobijeni rezultati ne pokazuju da se hipoteza prihvata, već da se ne može odbaciti.

**<u>2. ZADATAK</u> (*Metod statističkih ocena – ocena tačnosti aritmetičke sredine osnovnog skupa*)**

U tekstu zadatka dati su sledeći podaci:

- aritmetička sredina uzorka: $\bar{x} = 8.24$ mm,
- veličina uzorka: n = 200 elemenata,
- disperzija uzorka: $\sigma^2 = 0.1764$ mm$^2$, na osnovu koje dobijamo:
- standardnu devijaciju uzorka: $\sigma = \sqrt{0.1764} = 0.42$ mm.

Na osnovu ovih veličina dobijamo i ocene statističkih parametara osnovnog skupa:

- ocena aritmetičke sredine osnovnog skupa: $\bar{X} = \bar{x} = 8.24$ mm,
- ocena standardne devijacije osnovnog skupa: $s = \sigma = 0.42$ mm (ovo važi jer je n > 30).

Treba pokazati da je: $P(8.25 - 0.10 < \bar{X} < 8.25 + 0.10) \geq 99.73\%$. Da bismo to uradili, moramo naći najširi simetrični interval oko $\bar{X} = \bar{x} = 8.24$, koji se sadrži u intervalu 8.25±0.10. To radimo na sledeći način:

$$8.25 - 0.10 = 8.24 - \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0.09 \text{ mm},$$

$$8.25 + 0.10 = 8.24 + \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0.11 \text{ mm}.$$

Pošto je $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, zaključujemo da je najširi simetrični interval u kome se sadrži 8.25±0.10 onaj, čije je odstupanje oko $\bar{X} = \bar{x} = 8.24$: $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.09$ mm.

Ukoliko dokažemo da se $\bar{X}$ kreće u intervalu: (8.24–0.09, 8.24+0.09) = (8.15, 8.33), sa verovatnoćom većom od 99.73% (nivo tehničke tačnosti), utoliko će se pre naći i u intervalu: (8.25–0.10, 8.25+0.10) = (8.15, 8.35), koji je širi od prethodnog intervala.

Određujemo parametar t koji odgovara odstupanju ε = 0.09 mm:

$$\varepsilon = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow t = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{s} = \frac{0.09 \cdot \sqrt{200}}{0.42} = 3.03,$$

za koji zaključujemo da je veći od parametra koji odgovara tehničkoj tačnosti: $t = 3.03 > t_{99.73\%} = 3$, pa sledi da se aritmetička sredina čitave serije sadrži u intervalu: 8.24±0.09, a time i u širem intervalu: 8.25±0.10, sa verovatnoćom većom koja odgovara uslovima tehničke tačnosti. Dakle, prodavac je govorio istinu.

**<u>3. ZADATAK</u> (*Dvojne kontrolne karte $x_{bar}$-R*)**

Pošto je n<10 zaključujemo da je na slici prikazana dvostruka $\bar{x} - R$ kontrolna karta za protekli proces. Kada se radi o granično tačnom proteklom procesu, tada važi:

$$x_g = \bar{x}_r + 3\sigma_r = 30.01 + 3 \cdot 0.066 = 30.208 \text{ mm},$$

$$x_d = \bar{x}_r - 3\sigma_r = 30.01 - 3 \cdot 0.066 = 29.812 \text{ mm},$$

gde su reprezentativne vrednosti aritmetičke sredine i standardne devijacije dobijene prema obrascima:

$$\bar{x}_r = \bar{\bar{x}} = CL_{\bar{x}} = \frac{GKG_{\bar{x}} - DKG_{\bar{x}}}{2} = \frac{30.076 + 29.944}{2} = 30.01 \text{ mm},$$

$$\sigma_r = \frac{1}{d_2}\bar{R} = \frac{1}{2.97} \cdot CL_R = \frac{1}{2.97} \cdot 0.196 = 0.066 \text{ mm}.$$

a potreban faktor za protekli proces za n=9 ($d_2$ = 2.970), dobijen je prema UKP M1, str. 378, tab. 5. To znači da ispitivana karakteristika kvaliteta mora da ima sledeće tolerancijske granice da bi zadovoljila uslov granične tačnosti:

$$d = 30^{+0.208}_{-0.188} \text{ mm}.$$