KATEDRA ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO **JUN 2007. god.**
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA (0109)
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA I (0117) **I i II grupa**

PISMENI ISPIT

1. Istraživanjem međusobne zavisnosti između karakteristika konformnosti kvaliteta (tačnost obrade i habanje alata), na jednoj NUMA, došlo se do zavisnosti prikazanih tabelom 1.

Tabela 1.

x [μm]	35			39			45			52			57		
y [μm]	17	18	19	20	21	22	24	25	26	28	29	30	32	33	34

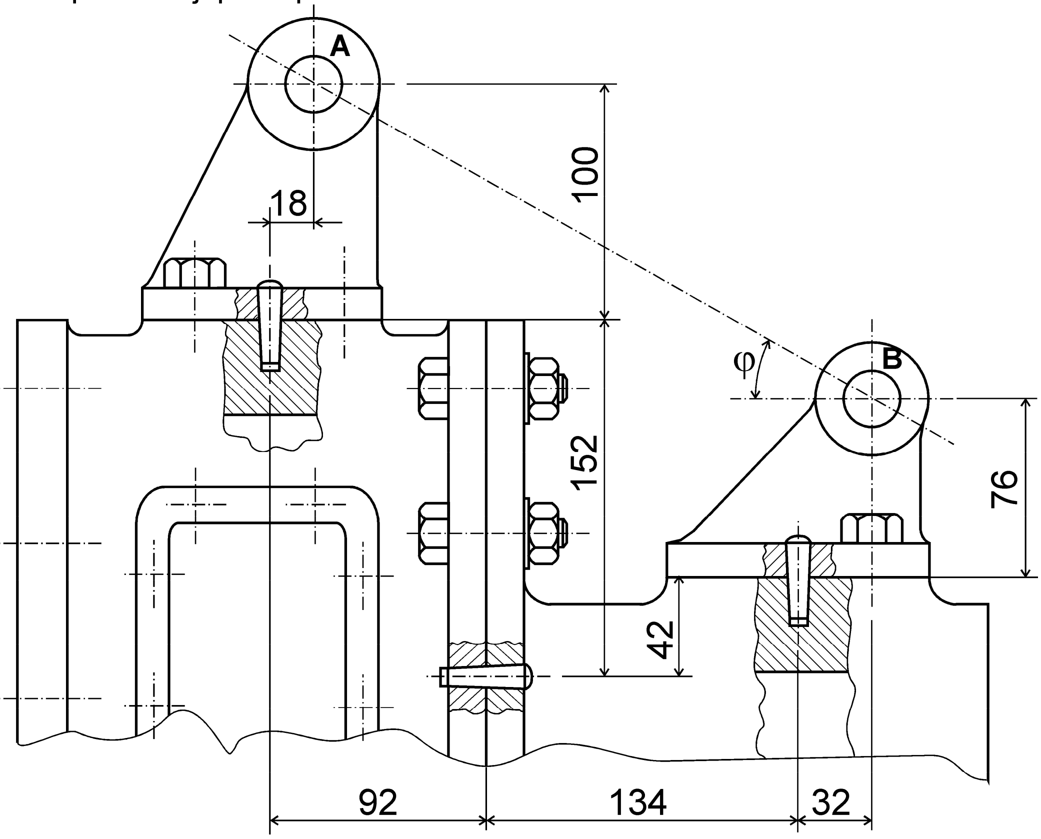
Potrebno je:

a) odrediti i nacrtati krivu regresije,

b) proveriti adekvatnost jednačine regresije, i

c) odrediti interval poverenja u tački x = 45 μm za P_{gs} = 95%.

2. Za sklop prikazan na sl.1. potrebno je odrediti nominalnu meru, širinu tolerancijskog polja i gornje i donje granično odstupanje rastojanja otvora A i B, značajnog za ispravno funkcionisanje čitavog sklopa. Poznato je da se pojedine mere delova sklopa ostvaruju sa veličinom tolerancijskog polja T_i = 0.03 mm, simetrično raspoređenom oko nominalne mere. Na dovoljnom broju uzoraka utvrđeno je da su mere svih sastavnih članova mernog lanca međusobno nezavisne i da se pokoravaju Simpsonovom rasporedu. Primeniti ekonomski opravdaniji postupak.



Slika 1: *Sklop iz teksta drugog zadatka.*

PRVA I DRUGA GRUPA - REŠENJA

1. ZADATAK

a) Određivanje i crtanje krive regresije:

Potrebno je prvo izračunati koeficijent korelacije, da bi se odredilo o kakvoj se regresiji radi. Za taj proračun kao i kasnija izračunavanja, formiramo pomoćnu tabelu (korelaciona tablica).

Ukupan broj uzoraka iznosi:

$$n = \sum(1) = 15$$

Broj različitih vrednosti karakteristike **x** iznosi: m=5.

Aritmetičke sredine karakteristika **x** i **y** su:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i = \frac{\sum(2)}{\sum(1)} = 45.6\ \mu m$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_j y_j = \frac{\sum(II)}{\sum(I)} = 25.2\ \mu m$$

Standardne devijacije (varijanse, disperzije):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum(3)}{\sum(1)} - \overline{x}^2} = 8.08950\ \mu m$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum(III)}{\sum(I)} - \overline{y}^2} = 5.44303\ \mu m$$

Kovarijacija slučajnih tačaka:

$$C_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_j - \overline{y}\right) = \frac{\sum(5)}{\sum(1)} - \overline{x}\cdot\overline{y} = 43.48\ \mu m^2$$

Koeficijent korelacije:

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0.98748$$

Pošto je $0.95 < 0.98748 = r_{xy} < 1$ sledi da postoji praktično funkcionalna zavisnost između x i y i to ***linearna***.

Potrebno je proveriti signifikantnost dobijenog koeficijenta regresije. Najpre određujemo računsku vrednost parametra t (t_r), prema sledećem obrascu:

$$t_r = \left|r_{xy}\right|\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 22.567$$

Za $P_{gs}=0.95$ i broj stepeni slobode k=n-2=15-2=13, prema tab.IV, UKP M2 (koristimo tablice za studentovu raspodelu, jer je n<30), dobijamo teoretsku vrednost parametra t (t_t): $t_t=2.16$

Upoređujemo računsku i teorijsku vrednost parametra t. Pošto je: $t_r=22.567 > t_t=2.16$ sledi da je r_{xy} signifikantan, tj. između odnosnih karakteristika postoji određena korelacija.

Opšti oblik krive regresije glasi:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x$$

pri čemu koeficijente a_0 i a_1 izračunavamo prema:

$$a_1 = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0.66443$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x} = -5.09780$$

***Tabela 2**: Pomoćna tabela za proračun parametara linearne regresije.*

KORELACIONA TABELA		x_i					f_j (I)	$f_j \cdot y_j$ (II)	$f_j \cdot y_j^2$ (III)
		35	39	45	52	57			
	17	1					1	17	289
	18	1					1	18	324
	19	1					1	19	361
	20		1				1	20	400
	21		1				1	21	441
	22		1				1	22	484
y_i	24			1			1	24	576
$i=\overline{1,n}$	25			1			1	25	625
	26			1			1	26	676
	28				1		1	28	784
	29				1		1	29	841
	30				1		1	30	900
	32					1	1	32	1024
	33					1	1	33	1089
	34					1	1	34	1156
fi	(1)	3	3	3	3	3	Σ(1)=15	Σ(II)=378	Σ(III)=9970
$f_i x_i$	(2)	105	117	135	156	171	Σ(2)=684		
$f_i x_i^2$	(3)	3675	4563	6075	8112	9747	Σ(3)=32172		
$\sum_{j=1}^{i} f_{ij} y_j$	(4)	54	63	75	87	99	Σ(4)=378		
$x_i \sum_{j=1}^{i} f_{ij} y_j$	(5)	1890	2457	3375	4524	5643	Σ(5)=17889		
$\overline{y}_i$	(6)	18	21	25	29	33			
$(f_i - 1)\cdot s_{1i}^2$	(7)	2	2	2	2	2	Σ(7)=10		
$f_i - 1$	(8)	2	2	2	2	2	Σ(8)=10		
s_{1i}^2	(9)	1	1	1	1	1			
$\hat{y}_i$	(10)	18.157	20.815	24.801	29.452	32.774			
$(\overline{y}_i - \hat{y}_i)^2$	(11)	0.0247	0.0343	0.0395	0.2046	0.0509	Σ(11)=0.354		
$f_i(\overline{y}_i - \hat{y}_i)^2$	(12)	0.0740	0.1029	0.1184	0.6138	0.1526	Σ(12)=1.062		
$f_i(x_i - \overline{x})^2$	(13)	337.08	130.68	1.08	122.88	389.88			

Tako dobijamo jednačinu regresije:

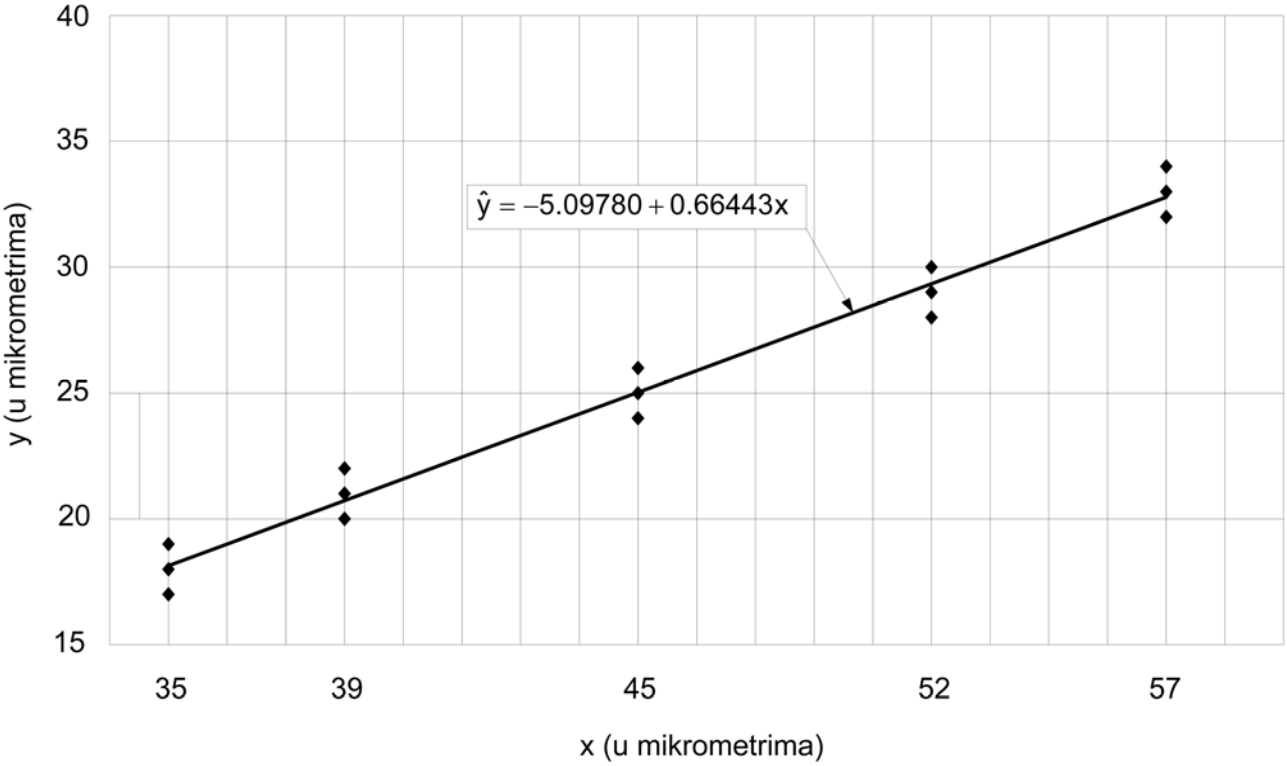
$$\hat{y} = -5.09780 + 0.66443x$$

Vrednosti regresione funkcije u karakterističnim tačkama su izračunate i date u tabeli 3.

***Tabela 3**: Vrednosti regresione funkcije u karakterističnim tačkama.*

x [µm]	35	39	45	52	57
y [µm]	18.157	20.815	24.801	29.452	32.774

Dijagram prave regresije prikazan je slikom 2.



Slika 2: *Prava regresije.*

b) Provera adekvatnosti jednačine regresije

Adekvatnost jednačine regresije proveravamo pomoću Fišerovog testa. Najpre izračunavamo računski Fišerov parametar (F_r), prema sledećem obrascu:

$$F_r = \frac{s_2^2}{s_1^2} = 0.35391$$

gde se nepoznate disperzije s_1^2 i s_2^2 računaju prema obrascima:

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(f_i - 1\right)\cdot s_{1i}^2}{\sum_{i=1}^{m}\left(f_i - 1\right)} = \frac{\sum(7)}{\sum(8)} = \frac{1}{1} = 1,\ s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i\left(\overline{y}_i - \hat{y}_i\right)^2}{m-2} = \frac{\sum(12)}{m-2} = 0.35391$$

pri čemu su:

$$s_{1i}^2 = \frac{1}{f_i - 1}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij} - \overline{y}\right)^2$$

$$s_{11}^2 = \frac{(17-18)^2 + (18-18)^2 + (19-18)^2}{3-1} = 1$$

$$s_{12}^2 = \frac{(20-21)^2 + (21-21)^2 + (22-21)^2}{3-1} = 1$$

$$s_{13}^2 = \frac{(24-25)^2 + (25-25)^2 + (26-25)^2}{3-1} = 1$$

$$s_{14}^2 = \frac{(28-29)^2 + (29-29)^2 + (30-29)^2}{3-1} = 1$$

$$s_{15}^2 = \frac{(32-33)^2 + (33-33)^2 + (34-33)^2}{3-1} = 1$$

Disperzija s_1^2 predstavlja ocenu nepoznate disperzije σ_y^2 rasporeda osnovnog skupa slučajnih veličina y_i. Ova disperzija je u vezi sa grečkama postavke eksperimenta, ili greškama merenja – dakle sa greškama identifikacije parova karakteristika x i y.

Disperzija s_2^2 predstavlja ocenu nepoznate disperzije $\sigma_{\bar{y}}^2$ empirijskog niza $\bar{y}_i (i = 1,...,m)$ u odnosu na odgovarajuće regresione (modelske) vrednosti.

Teorijsku vrednost Fišerovog parametra (F_t) nalazimo na osnovu tab.X, UKP M2, za stepene slobode:

$$k_1 = m - 2 = 3 \text{ i } k_2 = \sum_{i=1}^{m} f_i - m = 15 - 5 = 10$$

kao i za zadatu vrednost praga značajnosti:

$$\alpha = 1 - P_{gs} = 1 - 0.95 = 0.05$$

Tako dobijamo sledeću vrednost teorijskog Fišerovog parametra: F_t=3.71

Pošto je F_t>F_r možemo zaključiti da se hipoteza o adekvatnosti linearne regresije prihvata.

c) Određivanje intervala poverenja

Najpre ocenjujemo dispeziju rasporeda osnovnog skupa u odnosu na respektivne vrednosti $\hat{y}$:

$$s_3^2 = \frac{\sum(7) - \sum(11)}{\sum(1) - m + m - 2} = 0.74201$$

Statističke granice tolerancije eksperimentalne veličine **y** se nalaze na sledećem rastojanju od regresione linije:

$$\Delta y = t_p \cdot \sigma_3$$

Veličinu disperzije osnovnog skupa definišemo jednačinom: $\sigma_3 = \gamma \cdot s_3$, a vrednost parametra γ nalazimo prema jednačini:

$$\gamma = 1 + \frac{z_\alpha}{\sqrt{2 \cdot n}} = 1 + \frac{1.96}{\sqrt{2 \cdot 15}} = 1.35785$$

,

gde je $Z_\alpha = 1.96$, prema tab. III, UKP M2, za broj stepeni slobode: k=15-2=13. Na osnovu tih podataka dobijamo:

tp=2.16

$$\Delta y = t_p \cdot \sigma_3 = t_p \cdot \gamma \cdot s_3 = 2.16 \cdot 1.35785 \cdot \sqrt{0.74201} = 2.52643$$

Donja i gornja granica intervala poverenja za eksperimentalnu veličinu **y** određene su jednačinama:

$$DG_y = \hat{y} - \Delta y = -5.09780 + 0.66443x - 2.52643 = -7.62423 + 0.66443x$$

$$GG_y = \hat{y} + \Delta y = -5.09780 + 0.66443x + 2.52643 = -2.57137 + 0.66443x$$

Vrednosti granica intervala u tački x=45 µm iznose (ovo je vitno samo zbog crtanja granica):

$$DG_y = \hat{y}_{45} - \Delta y = 24.80134 - 2.52643 = 22.27491$$

$$GG_y = \hat{y}_{45} + \Delta y = 24.80134 + 2.52643 = 27.32778$$

odnosno za x=45µm:

$$\mathbf{22.27491 < y_{45} < 27.32778}$$

Granice intervala poverenja za regresionu karakteristiku $\hat{y}$ nalazimo prema:

$$DG_{\hat{y}} = \hat{y} + \Delta\hat{y} \qquad GG_{\hat{y}} = \hat{y} - \Delta\hat{y} \qquad \Delta\hat{y} = \frac{t_p \cdot s}{\sqrt{n-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{n^2 (x - \bar{x})^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}}$$

Prethodno je potrebno odrediti sledeću standardnu devijaciju, prema izrazu:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2}$$

Kada se u prethodni izraz zamene konkretne vrednosti dobija se:

$$s = \sqrt{\frac{1}{15}\begin{bmatrix}(17-18.157)^2+(18-18.157)^2+(19-18.157)^2\\ +(20-20.815)^2+(21-20.815)^2+(22-20.815)^2\\ +(24-24.801)^2+(25-24.801)^2+(26-24.801)^2\\ +(28-29.452)^2+(29-29.452)^2+(30-29.452)^2\\ +(32-32.774)^2+(33-32.774)^2+(34-32.774)^2\end{bmatrix}} = 0.85875$$

Ova vrednost disperzije omogućava da se izračuna vrednost širine intervala poverenja za regresionu karakteristiku $\hat{y}$, u okolini tačke x=45 μm:

$$\Delta\hat{y}_{45} = \frac{2.16\cdot 0.85875}{\sqrt{15-2}}\cdot\sqrt{1+\frac{15^2\left(45-45.6\right)^2}{15\cdot\frac{\sum(3)}{3}-\left(\frac{\sum(2)}{3}\right)^2}} = 0.51465$$

pa odgovarajuće granice intervala iznose:

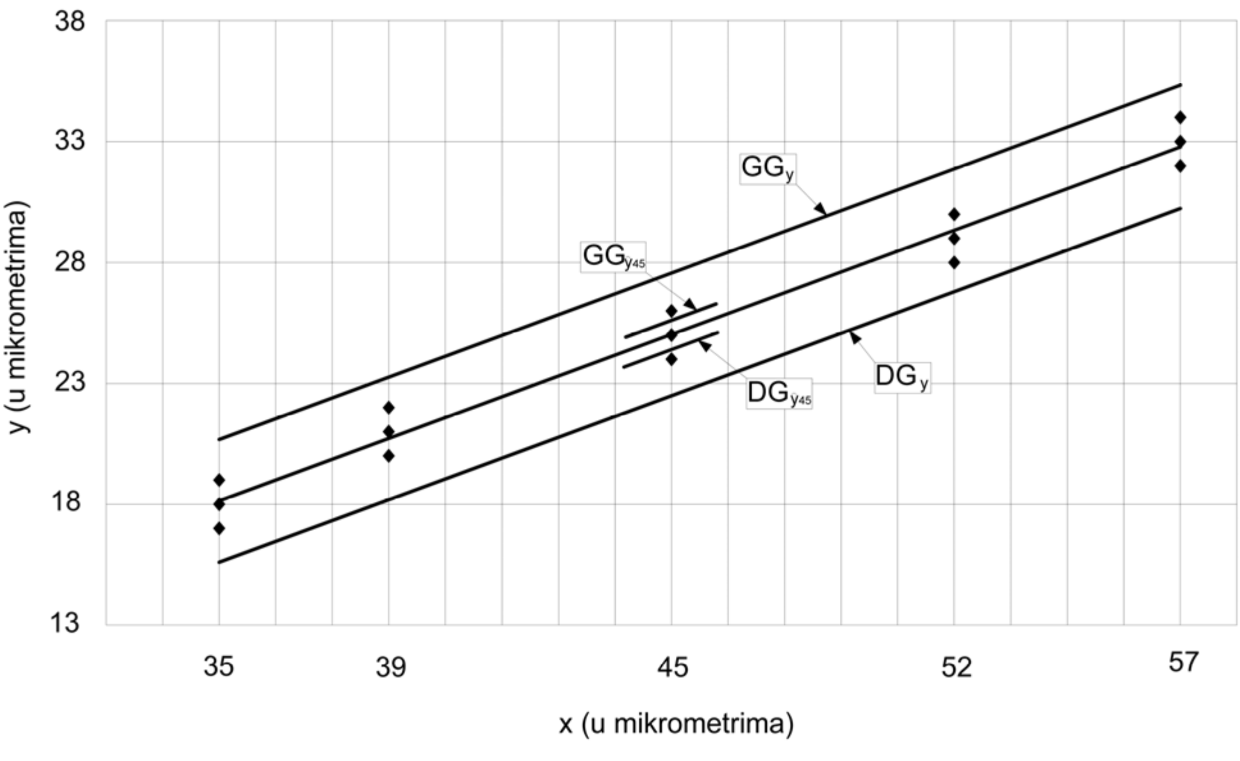
$$DG_{\hat{y}45} = \hat{y}_{45} + \Delta\hat{y}_{45} = 24.80134 - 0.51465 = 24.28670\,,$$

$$GG_{\hat{y}45} = \hat{y}_{45} - \Delta\hat{y}_{45} = 24.80134 + 0.51465 = 25.31599\,,$$

odnosno:

$$24.28670 < \hat{y}_{45} < 25.31599$$

Dijagram regresione prave sa izračunatim granicama intervala poverenja za eksperimentalnu (duž čitave regresione prave) i regresionu karakteristiku (samo u okolini tačke x=45 μm), dat je slikom 3.



***Slika 3:** Prava regresije sa ucrtanim intervalima poverenja.*

2. ZADATAK

Za rešavanje ovog zadatka stoje nam na raspolaganju metoda potpune i metoda nepotpune zamenljivosti. Pošto u tekstu zadatka stoji napomena da pri njegovom rešavanju treba primeniti ekonomski opravdaniji postupak, biramo ovu drugu.

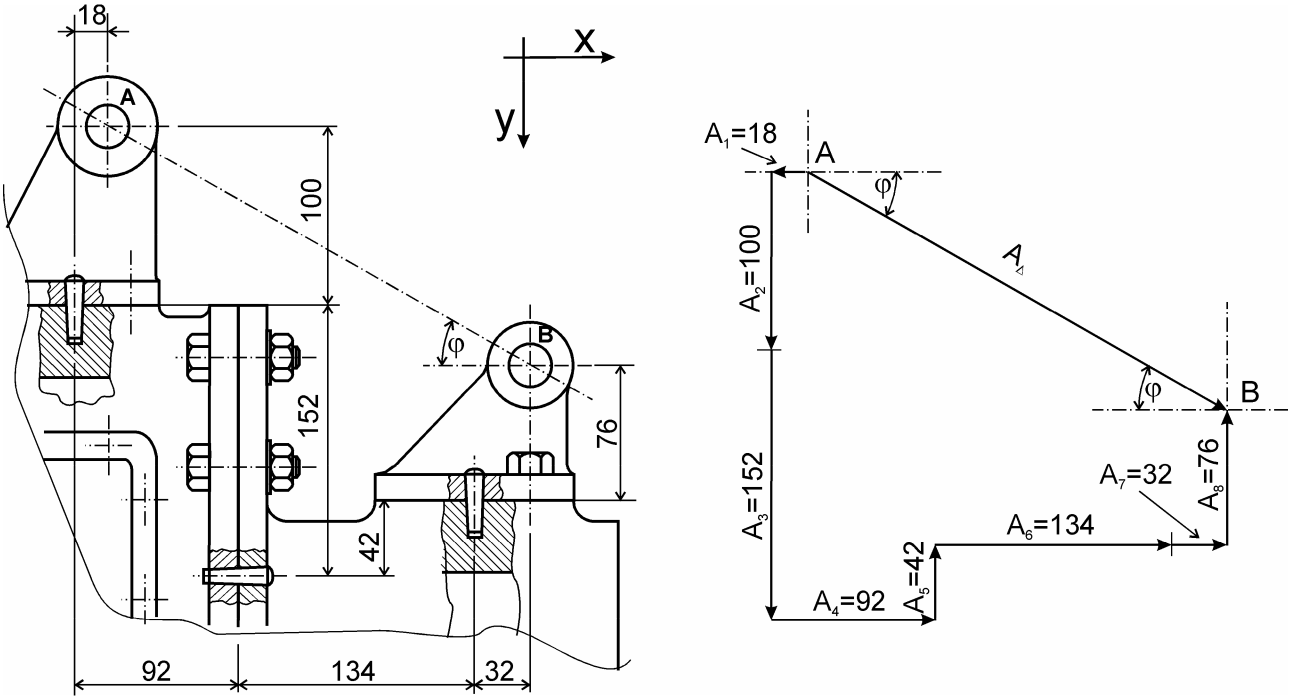
Proračun nominalne vrednosti završnog člana

Slikom 4 prikazan je merni lanac iz teksta zadatka, sa definisanim koordinatnim sistemom. Jasno je da se ovde radi o ravanskom mernom lancu, pa ćemo sve članove mernog lanca projektovati na pravac rastojanja između centara dvaju otvora koje predstavlja završni član mernog lanca i koje zaklapa sa osom z sledeći ugao:

$$tg\varphi = \frac{A_{//y}}{A_{//x}} = \frac{A_2 + A_3 - A_5 - A_8}{-A_1 + A_4 + A_6 + A_7} = \frac{100 + 152 - 42 - 76}{-18 + 92 + 134 + 32} = \frac{134}{240} = 0.5583 \Rightarrow$$

$$\varphi = arctg\left(0.558\right) = 29.176^{o}\,.$$

Uvećavajući članovi mernog lanca su: A_2, A_3, A_4, A_6, A_7, jer vektori kojima su simbolički predstavljeni ti sastavni članovi, zaklapaju ugao manji od 90^o sa vektorom kojim je predstavljen završni član mernog lanca. Analogno, umanjujući su A_1, A_4, A_8, jer vektori kojima su simbolički predstavljeni ti sastavni članovi, zaklapaju ugao veći od 90^o sa vektorom kojim je predstavljen završni član mernog lanca.



Slika 4: *Proračun mernog lanca.*

Mere sastavnih članova mernog lanca se raspodeljuju po Simpsonovim rasporedu, što znači da (prema OTML, tab.3, str.73) *koeficijent relativnog rasturanja* iznosi k = 1.22, a *koeficijent asimetrije* iznosi $\alpha = 0$.

Nominalnu meru završnog člana određujemo prema sledećoj jednačini:

$$A_{\Delta_S} = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \left(A_{Si} + \alpha_i \frac{\delta_i}{2} \right) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i' \left(A_{Si} + \alpha_i \frac{\delta_i}{2} \right) \cos\varphi_i\,,$$

gde je m ukupan broj članova mernog lanca. Radi lakšeg proračuna formiramo tabelu 4, uz sledeće napomene: φ_i predstavlja apsolutnu vrednost ugla između pojedinog sastavnog člana i završnog člana. Ako je član uvećavajući, koeficijent a'_i je +1, a u suprotnom –1. Proizvod kosinusa ugla φ_i i koeficijenta a'_i svakog sastavnog člana predstavlja prenosni odnos tog člana u ravanskom mernom lancu, u oznaci a_i.

Tabela 4.

A_i	A_{Si}	α_i	δ_i	φ_i		$\cos\varphi_i$	a'_i	$a_i = a'_i \cdot \cos\varphi_i$	$a_i\left(A_{Si} + \alpha_i \frac{\delta_i}{2}\right)$
A_1	18	0	0.02	φ	29.176	0.873	–1	– 0.873	– 15.716
A_2	100	0	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	1	0.487	48.749
A_3	152	0	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	1	0.487	74.099
A_4	92	0	0.02	φ	29.176	0.873	1	0.873	80.328
A_5	42	0	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	–1	– 0.487	– 20.475
A_6	134	0	0.02	φ	29.176	0.873	1	0.873	116.999
A_7	32	0	0.02	φ	29.176	0.873	1	0.873	27.940
A_8	76	0	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	–1	– 0.487	– 37.050
								Σ	**274.874**

Primenom tabele 4, dobija se vrednost završnog člana:

$$A_{\Delta s} = 274.874 \text{ mm.}$$

Proračun tolerancije završnog člana

Pošto je veliki broj članova mernog lanca (m = 9), prema centralnoj graničnoj teoremi, sledi da se mera završnog člana mernog lanca raspoređuje po normalnom zakonu, odnosno da je: $k_\Delta = 1$. Tada se vrednost širine tolerancijskog polja dobija prema obrascu:

$$\delta_\Delta = \frac{1}{k_\Delta}\sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} a_i^2 \cdot k_i^2 \cdot \delta_i^2}\ .$$

Radi lakšeg proračuna formiramo sledeću tablicu:

Tabela 5.

A_i	k_i	$\delta_i = T_i$	φ_i		$\cos\varphi_i$	a'_i	$a_i = \cos\varphi_i \cdot a'_i$	$a_i^2 \cdot k_i^2 \cdot \delta_i^2$
A_1	1.22	0.02	φ	29.176	0.873	–1	– 0.873	0.0004539
A_2	1.22	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	1	0.487	0.0001415
A_3	1.22	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	1	0.487	0.0001415
A_4	1.22	0.02	φ	29.176	0.873	1	0.873	0.0004539
A_5	1.22	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	–1	– 0.487	0.0001415
A_6	1.22	0.02	φ	29.176	0.873	1	0.873	0.0004539
A_7	1.22	0.02	φ	29.176	0.873	1	0.873	0.0004539
A_8	1.22	0.02	$90^o - \varphi$	60.824	0.487	–1	– 0.487	0.0001415
							Σ	**0.0023816**

Na osnovu rezultata proračuna dobijamo:

$$\delta_\Delta = \frac{1}{1} \cdot \sqrt{0.0023816} = 0.049 \text{ mm.}$$

Vrednost gornje i donje granične mere dobijamo prema sledećem obrascu:

$$A_{\Delta g,d} = A_{\Delta_S} \pm \frac{1}{2} \cdot \delta_\Delta \Rightarrow$$

$$A_{\Delta g} = 274.874 + \frac{1}{2} \cdot 0.049 = 274.898 \text{ mm}$$

$$A_{\Delta d} = 274.874 - \frac{1}{2} \cdot 0.049 = 274.850 \text{ mm}$$

Konačna vrednost kote završnog člana iznosi:

$$A_\Delta = 274^{+898}_{+850} \text{ mm.}$$