

Upravljanje kvalitetom proizvoda I – četvrta nastavna jedinica – statistički metodi upravljanja kvalitetom

**Prof. dr Vidosav D.
Majstorović, dipl.maš.inž.
Mašinski fakultet u Beogradu**



Metod krivih rasporeda frekvencija (MKRF)

★ MKRF se koristi u:

- Prijemnoj kontroli
- Međufaznoj (procesnoj) kontroli
- Završnoj kontroli
- Upravljanju kvalitetom konformnosti u procesu izrade
- Podešavanju proizvodne opreme
- Ispitivanju sposobnosti obradnog i tehnološkog procesa
- Definisaniu tolerancija novog proizvoda
- Preventivnoj kontroli statističkih ovladanih ili stabilnih procesa
- Ispitivanju tehnološke sposobnosti proizvodne opreme



Osnovne etape metoda

- ★ Prva etapa – predmet i osnovni zadaci ispitivanja, veličina empirijskog skupa, merni sistem i drugi uslovi ispitivanja
- ★ Druga etapa – statistička obrada empirijskog skupa (izračunavanje statističkih parametara – lokacija, disperzija i oblik rasporeda frekfencija analizirane karakteristike kvaliteta)
- ★ Treća etapa – analiza i konačni zaključci izvršenih ispitivanja

Veličina uzorka

- ★ Jedan od osnovnih koraka prve etape je $n = f$ (N)
- ★ Dobijene informacije o parametrima i zakonitostima osnovnog skupa (N) (kvalitet serije), preko uzorka, biće pouzdane samo tada ako je uzorak reprezentativan (slučajno odabran i dovoljno veliki)
- ★ Uzorak će biti slučajno odabran ako postoji jednaka verovatnoća da se svaki element osnovnog skupa (N) izabere u uzorak (n), što se postiže korišćenjem tablice slučajnih brojeva

Veličina uzorka

- ★ U nauci o kvalitetu postoje određeni postupci, pomoću kojih se sa potrebnom tačnošću, može odrediti veličina uzorka za bilo koji primer primene MKRF
- ★ Jedna od osnovnih je stepen bliskosti empirijske distribucije frekvencija teorijskoj Gausovoj distribuciji



Veličina uzorka

- ★ Kada je poligon frekveci uzorka blizak normalnoj distribuciji, (prati se preko poligona oblika frekvencija ili Henrijeve prave), veličina uzorka je manja i obrnuto
- ★ Izračunate standardne devijacije uzorka su: 11.8%, 5.4%, 2.6%, 1% i 0.5% a za njih korespodentne vrednosti veličine uzorka su: 5, 10, 20, 50, 100
- ★ Prethodna analiza pokazuje da je veličina uzorka od 50 primeraka (n) dovoljno velika
- ★ Uzimajući i druge okolnosti u tehničkoj praksi veličina uzorka se uzima od 50 do 200 elemenata

Osnovne jednačine metoda – parametri lokacije i disperzije

- ★ Radi jednostavnijeg i bržeg opisivanja svojstava i zakonomernosti nekog rasporeda frekvencija, slučajne veličine x , koriste se *parametri rasporeda*
- ★ Oni definišu: *lokaciju, disperziju i oblik rasporeda frekvencija slučajne veličine*



Parametri lokacije

- ★ U parametre lokacije ili koordinate centra grupisanja slučajne veličine spadaju: *aritmetička sredina, moda i medijana*

- ★ Aritmetička sredina – \bar{x}

$$\bar{x} = E(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i f_i$$

Parametri lokacije

- ★ AS određuje srednji položaj rasporeda frekvencija i identična je matematičkom očekivanju ili ekspanaciji $E(x)$ i definiše se za diskontinualne slučajne veličine prethodnom jednačinom
- ★ Za slučajne kontinualne veličine AS je

$$\bar{x} = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Parametar disperzije

- ★ Parametri disperzije predstavljaju meru varijabilnosti slučajne veličine x , odnosno meru rasipanja veličine x oko centra grupisanja \bar{x}
- ★ Ovaj parametar je *raspon* ili *razmak*

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Parametar disperzije

★ Standardna devijacija – σ

$$\sigma^2 = E\left[(x - \bar{x})^2\right] = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

$$\sigma^2 = E\left[(x - \bar{x})^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x})^2 f(x) dx$$



MKRF – grupni intrvali (d)

- ★ Koordinata lokacije (\bar{x})

$$\bar{x} = a + \frac{d}{n} \sum_{i=1}^k b_i f_i$$

- ★ Koordinate disperzije (σ)

$$\sigma = d \sqrt{\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^k b_i^2 f_i \right] - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k b_i f_i \right]^2}$$



Uzorak / osnovni skup

- ★ Izračunate vrednosti aritmetičke sredine \bar{x} , predstavljaju nepristrasnu ocenu

$$E(x) = \bar{X} \approx \bar{x}$$



Uzorak / osnovni skup

- ★ Tačnost odnosno granice tačnosti veličine \bar{X} , procenjene j-nom 7.10 definisane su intervalom poverenja

$$IP = [g_1, g_2]$$

Uz statističku pouzdanost (verovatnoću)

$$P(g_1 < \bar{X} < g_2) = 2\phi(t)$$

Granice intervala poverenja

$$g_1 = \bar{x} - t\sigma_{\bar{x}} = \bar{X} - t \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}$$

Donja

$$g_2 = \bar{x} + t\sigma_{\bar{x}} = \bar{X} + t \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}$$

Gornja



Standardna greška aritmetičke sredine uzorka

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$



Statistiška pouzdanost

$$2\phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\bar{X} = \bar{x} \pm t \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Vrednost rizika

$$\alpha = 1 - 2\phi(t)$$

- ★ Verovatnoća da će vrednost nepoznate veličine X biti izvan intervala poverenja $IP = [g_1, g_2]$



Statističke granice tolerancije

- ★ Posle određivanja parametara rasporeda osnovnog skupa (N) \bar{X} i σ_0 , određuju se *statističke granice tolerancije* ili *prirodne granice procesa*
- ★ *Prirodne granice procesa* za jedan deo predstavljaju *sposobnost obradnog procesa* odnosno *sposobnost obradnog sistema*

Statističke granice tolerancije

- ★ Kada je širina intervala poverenja $IP = T_p = g_1 - g_2$, gde je T_p – prirodna tolerancija obradnog procesa **manja** od širine tolerancijskog polja T , onda je dati obradni proces / sistem *spособan*



Statističke granice tolerancije

- ★ Kada je širina intervala poverenja $IP = T_p = g_1 - g_2$, gde je T_p – prirodna tolerancija obradnog procesa **manja** od širine tolerancijskog polja T , ali su srednje vrenosti za T_p i T međusobno pomerene, vrši se centriranje ove dve tolerancije

Statističke granice tolerancije

- ★ Kada je širina intervala poverenja $IP = T_p = g_1 - g_2$, gde je T_p – prirodna tolerancija obradnog procesa **veća** od širine tolerancijskog polja T , onda dati proces nije sposoban, pa se propisani kvalitet konformnosti postiže određenim intervencijama na sistemu (mašini, procesu, alatu, delu, ...)

Statističke granice tolerancije

- ★ Verovatnoća da će se vrednost slučajne veličine nalaziti u drugim, manjim ili većim granicama intervala, prikazana je u tablici 7.1 i na slici 7.3



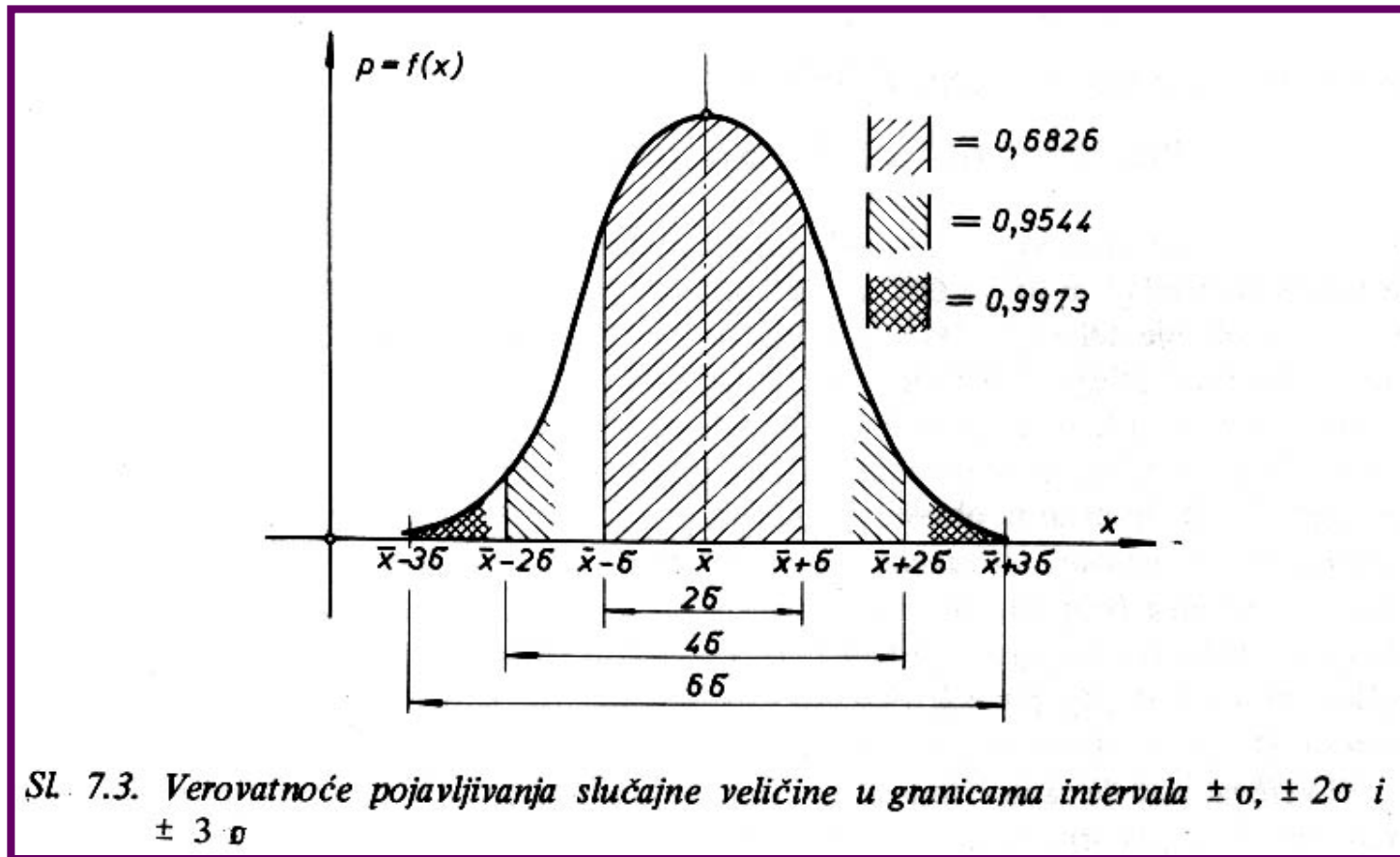
Tablica 7.1

Velicina intervala	Polozaj intervala	Verovatnoća da se X sadrži	
		u granicama intervala	van granica intervala
2 σ	$\bar{x} - 2\sigma \div \bar{x} + 2\sigma$	68,26 %	31,74 %
4 σ	$\bar{x} - 4\sigma \div \bar{x} + 4\sigma$	95,44 %	4,56 %
6 σ	$\bar{x} - 6\sigma \div \bar{x} + 6\sigma$	99,73 %	0,27 %
8 σ	$\bar{x} - 8\sigma \div \bar{x} + 8\sigma$	99,994 %	0,006 %
10 σ	$\bar{x} - 10\sigma \div \bar{x} + 10\sigma$	99,99994 %	0,00006 %

TABLICA 7.1.

Slika 7.3 Verovatnoća

■ ■ ■



Primer ispitivanja sposobnosti obradnog procesa

- * Procedura MKRF ima nekoliko koraka:**
 - prikupljanje podataka, tablica 7.2**
 - grupisanje i osnovna obrada podataka, tablica 7.3**
 - grafička prezentacija rezultata, slika 7.5**
 - provera normalnosti osnovnog skupa, henrijeva prava, slika 7.7**
 - analitička provera osnovnih statističkih parametara**
 - međusobni odnos tolerancija T_p i T , slika 7.9**



Tablica 7.2 Osnovni podaci

N	X	N	X	N	X	N	X	N	X
1	35,02	13	34,93	25	34,98	37	34,95	49	34,97
2	34,96	14	34,94	26	34,96	38	34,96	50	34,94
3	34,99	15	34,90	27	35,02	39	35,00	51	35,01
4	35,04	16	34,93	28	34,84	40	34,90	52	34,88
5	34,87	17	34,99	29	34,99	41	35,03	53	34,95
6	35,10	18	34,81	30	34,91	42	35,13	54	34,98
7	34,97	19	35,02	31	34,94	43	34,98	55	35,01
8	34,94	20	34,99	32	35,07	44	35,04	56	34,91
9	35,05	21	34,92	33	34,85	45	34,93	57	35,04
10	34,97	22	35,06	34	35,03	46	35,00	58	34,98
11	35,01	23	34,97	35	34,95	47	34,90	59	34,94
12	34,88	24	34,92	36	34,97	48	35,00	60	34,98

TABLICA 7.2.

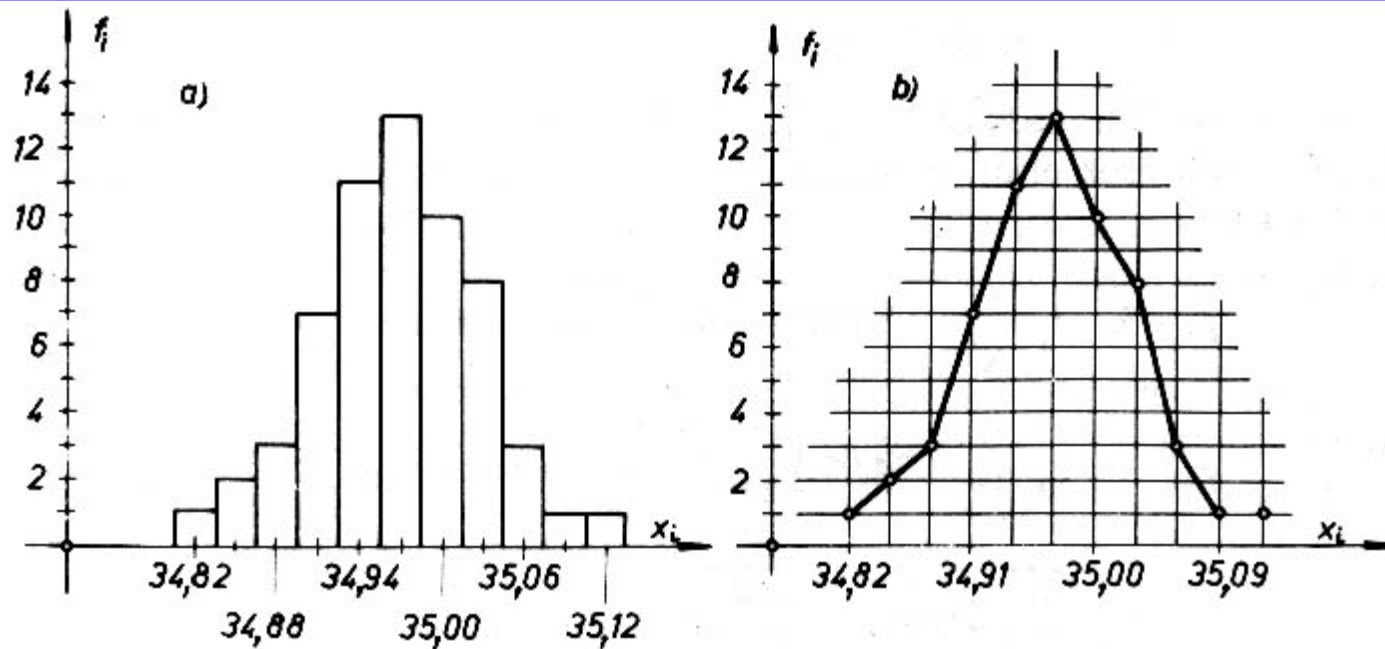
Tablica 7.3 Uređeni osnovni podaci

Grupni interval	Sredina intervala	Markiranje	Frekvencije		Kumulativna verovatnoća
			apsolutne f_i	relativne $p_i = \frac{f_i}{N}$	
34,81 ÷ 34,83	34,82		1	0,0166	0,0166
34,84 ÷ 34,86	34,85		2	0,0333	0,0499
34,87 ÷ 34,89	34,88		3	0,0500	0,0999
34,90 ÷ 34,92	34,91	###	7	0,1170	0,2169
34,93 ÷ 34,95	34,94	###	11	0,1830	0,3999
34,96 ÷ 34,98	34,97	###	13	0,2170	0,6169
34,99 ÷ 35,01	35,00	###	10	0,1667	0,7836
35,02 ÷ 35,04	35,03	###	8	0,1330	0,9166
35,05 ÷ 35,07	35,06		3	0,0500	0,9666
35,08 ÷ 35,10	35,09		1	0,0166	0,9832
35,11 ÷ 35,13	35,12		1	0,0166	0,9998
Suma:			$\sum_{i=1}^{11} f_i = 60$	$\sum_{i=1}^{11} p_i = 1$	

TABLICA 7.3.

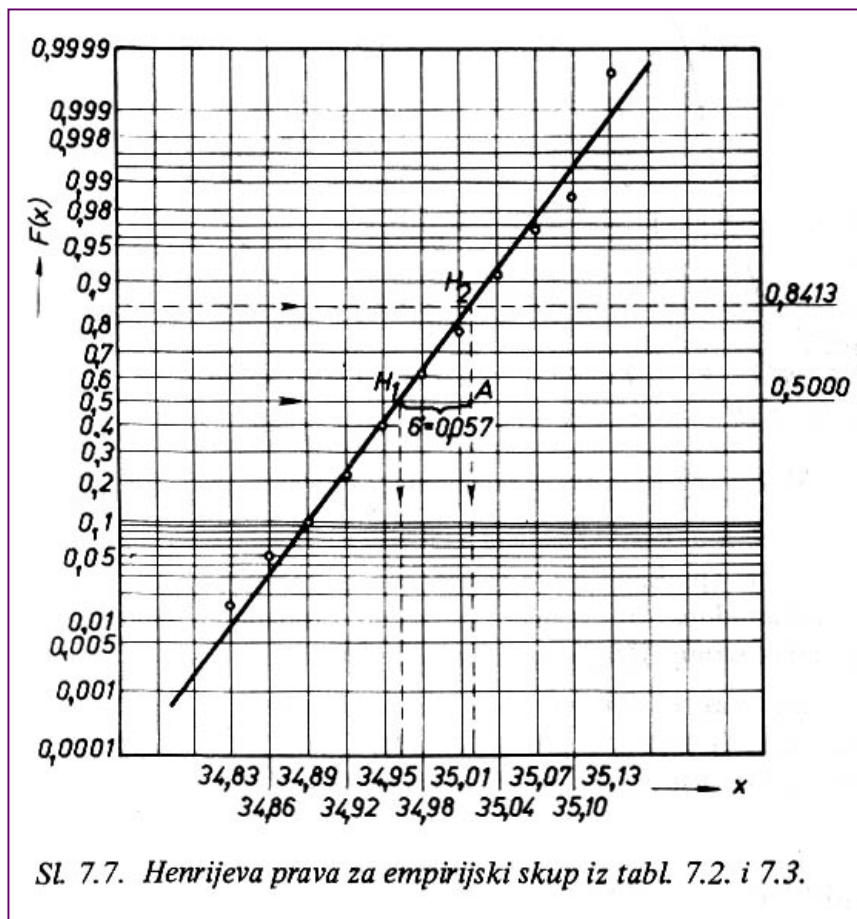


Slika 7.5 Histogram i PF

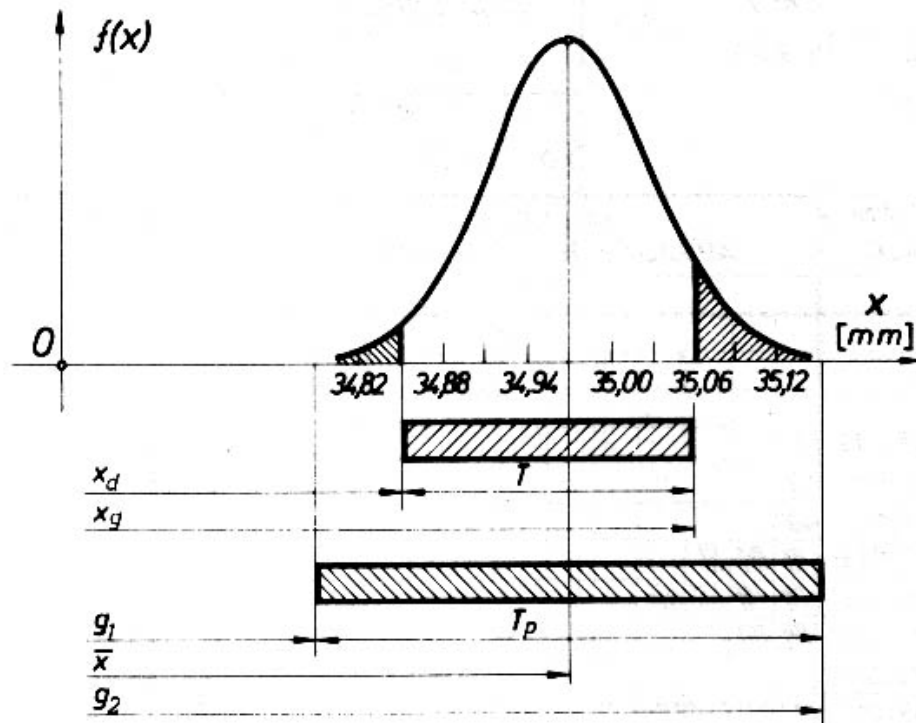


Sl. 7.5. Histogram (a) i poligon (b) rasporeda frekvencija slučajne veličine x (iz tablica 7.2. i 7.3)

Henrijeva prava – primer, slika 7.7



Slika 7.9 Međusobni odnos T_p i T



Sl. 7.9. Međusobni odnos širina i položaja polja prirodne tolerancije (T_p) i polja zadate tolerancije (T)

Statistički list i dijagram verovatnoće

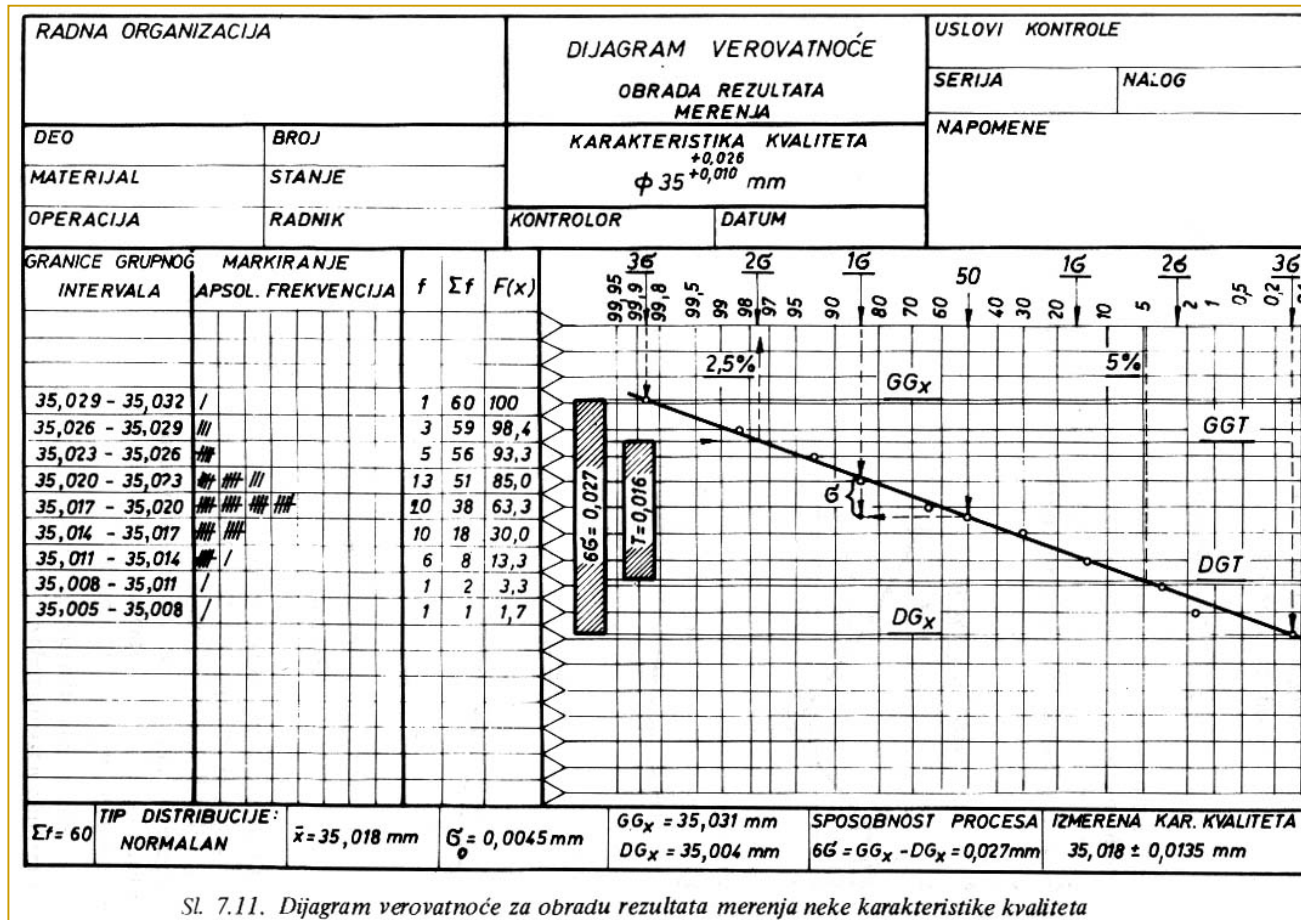
- ★ **Primena metoda KRF može biti:**
 - **analitička** (**statistički list**),
slika 7.10
 - **grafička** (**dijagram
verovatnoće**), **slika 7.11**

Slika 7.10 Statistički list

RADNA ORGANIZACIJA		STATISTIČKI LIST		SERIJA		
		OBRADA REZULTATA MERENJA <td colspan="2">NALOG</td>		NALOG		
DEO	BROJ	KARAKTERISTIKA KVALITETA		NAPOMENE		
MATERIJAL	STANJE	$\phi 35^{+0,028}_{-0,010}$ mm				
OPERACIJA		USLOVI KONTROLE				
RADNIK		KONTROLOR	DATUM			
GRANICE GRUPNOG INTERVALA	MARKIRANJE APSOLUTNIH FREKVENCIJA		f_j	$b_j = \frac{x_{s_j} - a}{d}$	$b_j f_j$	$b_j^2 f_j$
[1]	[2]		[3]	[4]	[5]	[6]
35,029 - 35,032	/		1	4	4	16
35,026 - 35,029	///	GGT	3	3	9	27
35,023 - 35,026	////		5	2	10	20
35,020 - 35,023	/////		13	1	13	13
35,017 - 35,020	/////		20	0	0	0
35,014 - 35,017	/////		10	-1	-10	10
35,011 - 35,014	/////	DGT	6	-2	-12	24
35,008 - 35,011	/		7	-3	-3	9
35,005 - 35,008	/		1	-4	-4	16
ŠIRINA INTERVALA $d = 0,003$ mm		POMOĆNA VELIČINA $a = 35,0185$ mm	$\Sigma f_j = 60$	-	$\Sigma b_j f_j = 7$	$\Sigma b_j^2 f_j = 135$
$\bar{x} = a + \frac{d}{n} \Sigma b_j f_j = 35,019$ mm		INTERVAL FOVERENJA ZA $2\phi(1-\frac{0,9974}{2})$ $\bar{x} = \bar{x} \pm t_p \frac{s}{\sqrt{n}} = 35,019 \pm 0,0014$ mm	NAPOMENE:			
$G = d \sqrt{\frac{1}{n} (\Sigma b_j^2 f_j) - (\frac{1}{n} \Sigma b_j f_j)^2} = 0,004$ mm		OSTALE VELIČINE				
$s = G \sqrt{\frac{n}{n-1}} = 0,004$ mm						
SPOSOBNOST PROCESA $6\sigma_0 = 0,024$ mm						
IZMERENA KARAKTERISTIKA KVALITETA $x = \bar{x} \pm 3\sigma_0 = 35,019 \pm 0,012$ mm						

Sl. 7.10. Statistički list za obradu rezultata merenja neke karakteristike kvaliteta

Slika 7.11 Dijagram verovatnoće



Sl. 7.11. Dijagram verovatnoće za obradu rezultata merenja neke karakteristike kvaliteta

Neki karakteristični rezultati ispitivanja

- ★ **Ispitivanjem sposobnosti nekog procesa, odnosno nivoa datih karakteristika kvaliteta konformnosti, pomoću MKRF, mogu se dobiti sledeći karakteristični rezultati:**
 - **a) proces nije statistički ovladan i nije pod kontrolom (proces nestabilan i netačan)**
 - **b) proces je nestabilan ali je tačan, jer se prirodna tolerancija procesa nalazi u okvirima propisane tolerancije kvaliteta**

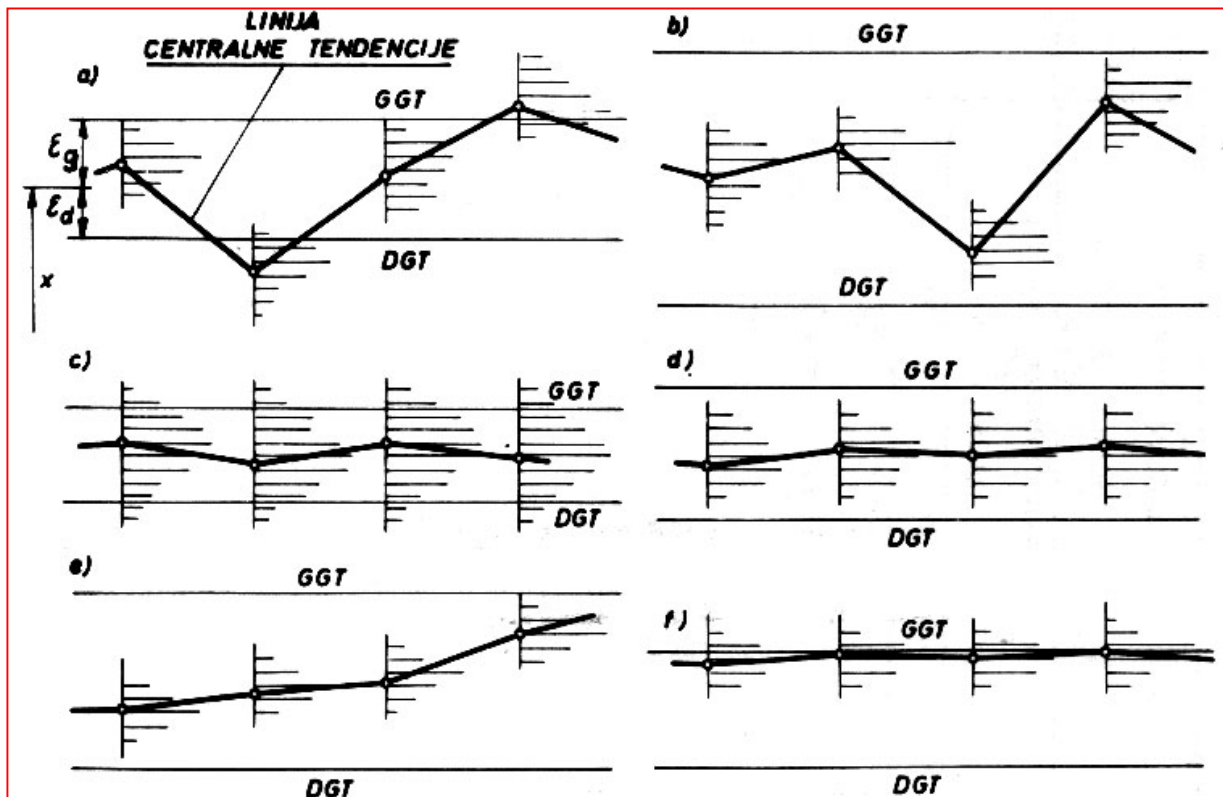


Neki karakteristični rezultati ispitivanja

- ✱ c) proces je stabilan ili statistički ovladan, ali je netačan ili nije pod kontrolom
- ✱ d) proces je stabilan i tačan
- ✱ e) proces ima trend (prisutni sistematski promenljivi faktori – habanje alata
- ✱ f) stabilan ali ne centriran proces, koji se centriranjem prevodi u tačan proces, slika 7.12



Slika 7.12 Neki ...



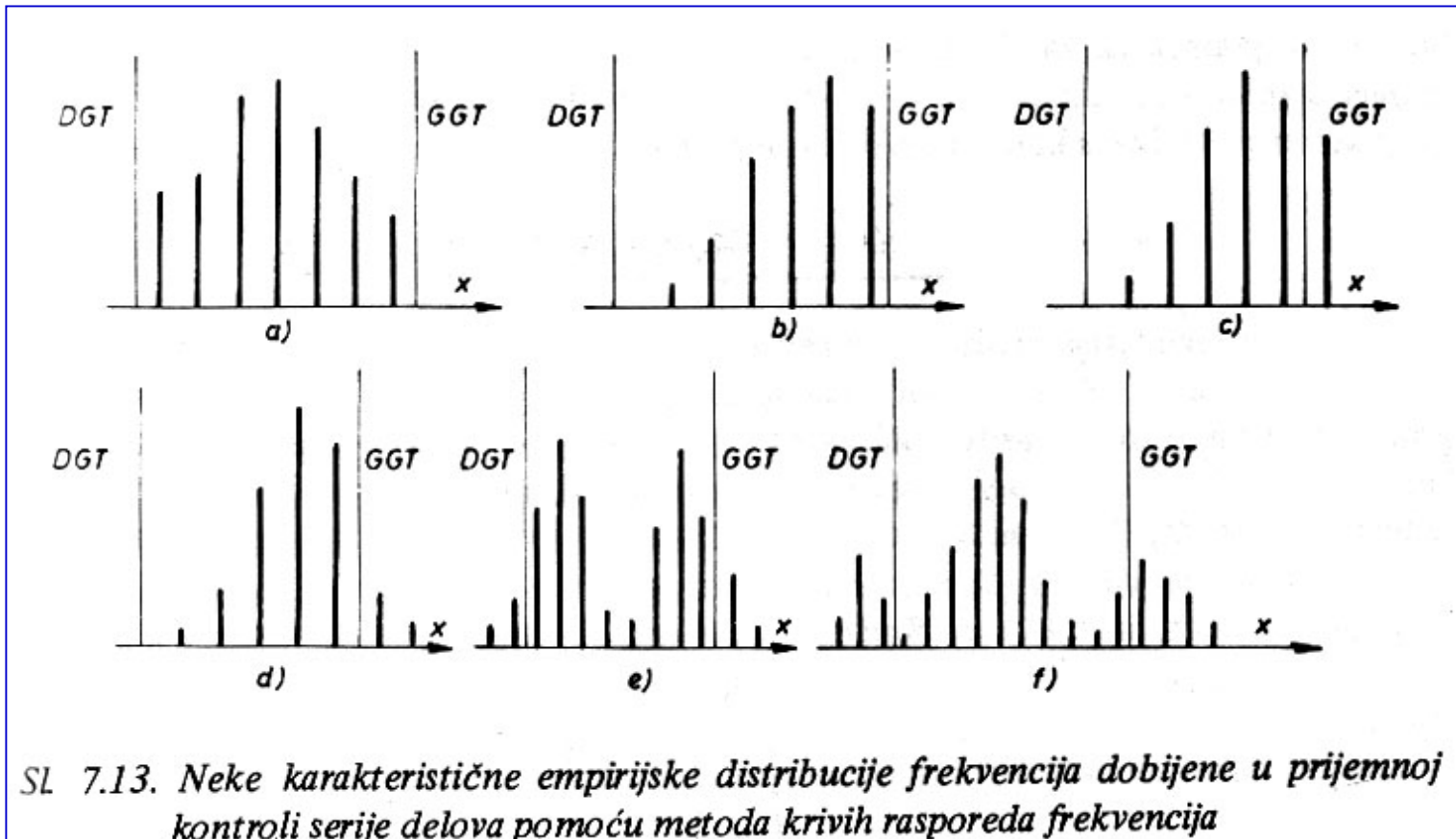
Sl. 7.12. Neki karakteristični primeri rezultata pri ispitivanju sposobnosti (stabilnosti i tačnosti) procesa pomoću metoda krivih rasporeda frekvencija

Primena MKRF u prijemnoj kontroli

- ★ Ovaj metod se primenjuje i u prijemnoj kontroli kvaliteta, na primer ulaznih delova slika 7.13:
 - a) proizvođač je distribuciju frekfencija isporučene serije prilagodio propisanom tolerancijskom polju
 - b, c, d) isto kao pod a, ali je završna kontrola proizvođača obavljena mernim priborom sa nedopuštenim greškama (c), odnosno završna kontrola proizvođača propustila je jedan deo netačno izrađenih delova (d)
 - e, f) serije sadrže pomešane delove iz različitih procesa proizvođača



Slika 7.13 Neke karakteristike ...



SL 7.13. Neke karakteristične empirijske distribucije frekvencija dobijene u prijemnoj kontroli serije delova pomoću metoda krivih rasporeda frekvencija

Hvala Vam na pažnji !

Vaš

**Prof. Dr Vidosav D. Majstorović,
dipl.maš.inž.**

Mašinski fakultet u Beogradu

P I T A N J A !

