

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
- МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ -  
БРОЈ: 2403/2  
ДАТУМ: 14.12.2012.

На основу захтева руководиоца пројекта проф.др Бојана Бабића бр. 2403/1 од 13.12.2012. године и чл. 12.5 Статута Машинског факултета, Истраживачко стручно веће на седници од 13.12.2012. године, донело је следећу


### О Д Л У К У

Да се за рецензенте Техничког решења рађеног у оквиру пројекта ТР 35004, под насловом: **„Нови приступ оптимизацији кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада ”**, чији су аутори: проф.др Угљеша Бугарић, др Јосиф Вуковић, ред.проф. у пензији, Душан Глишић, дипл.инж.маш., проф.др Душан Петровић и проф.др Зоран Миљковић, именују:

- проф.др Александар Обрадовић и
- проф.др Милош Танасијевић, Рударско геолошки факултет.

Одлуку доставити: Министарству просвете, науке и технолошког развоја РС, рецензентима и архиви Факултета ради евиденције.

ПРОДЕКАН  
ЗА НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКУ ДЕЛАТНОСТ

  
Проф.др Војкан Лучанин

## Novi pristup optimizaciji kretanja mehanizama – radnog ciklusa jednopozicionih transportnih mašina sa prekidnim načinom rada

Uglješa Bugarić<sup>1</sup>, Josif Vuković<sup>2</sup>, Dušan Glišić<sup>3</sup>, Dušan Petrović<sup>4</sup>, Zoran Miljković<sup>5</sup>

### 1. OBLAST NA KOJU SE TEHNIČKO REŠENJE ODNOSI

Tehničko rešenje (nova metoda) pripada oblasti mašinstva i direktno je usmereno na jedan od najosetljivijih modula ukupnog procesa projektovanja - model optimizacije rada (izbora) sistema i sredstava, u ovom slučaju transportnih sredstava za izvršavanje funkcije kretanja i transporta - transportnih sistema u industrijskim odnosno proizvodnim sistemima.

Prema mišljenju Evropske Komisije za razvoj, osnov inovacije u oblasti proizvodnog mašinstva čini integracija novih znanja u postojeće tehničke sisteme, odnosno njihova primena u pravcu održive proizvodnje i potrošnje [32]. Shodno tome, istraživanja u okviru projekta tehnološkog razvoja pod nazivom „*Inovativni pristup u primeni inteligentnih tehnoloških sistema za proizvodnju delova od lima zasnovan na ekološkim principima*” (evidencioni broj TR-35004), delom se odnosi i na razvoj metodologija i novih metoda u projektovanju mašinskih - transportnih sistema, odnosno razvoj nove metode analize i optimizacije vremena radnog procesa kao osnovnog parametra tehnološke funkcije određene klase mašina.

Rezultat primene opisanog tehničkog rešenja - nove metode je analiza i optimizacija radnog ciklusa (parametara performansi) jednopozicionih mašina sa prekidnim načinom rada, u koje spadaju mašine i uređaji sistema kretanja i transporta materijala i ljudi, konkretno onih transportnih mašina i uređaje gde je teret okačen o uže (putnički i teretni liftovi) i onih u čijem radu postoji analogija sa matematičkim klatnom (dizalice). Cilj razvoja nove metoda je poboljšanje situacije u funkciji razvoja i projektovanja proizvoda kod proizvođača, povećanjem efektivnosti i efikasnosti procesa, odnosno metodologije razvoja i projektovanja složenih tehničkih sistema uopšte.

### 2. TEHNIČKI PROBLEM

Očigledno postoji široko polje za istraživanja i razvoj novih, boljih metoda i alata za pojedine operacije procesa projektovanja - analize, sinteze, evaluacije rešenja i optimizacije, kao i specifičnih metoda analize i optimizacije pojedinih projektnih parametara.

S obzirom na pristupe i načine - metode koji se koriste u današnjoj praksi projektovanja tehničkih sistema, ovim tehničkim rešenjem napor se usmerava na potrebu poboljšanja metoda analize i optimizacije parametara performansi (tehnološke funkcije) sistema. Iz tog okvira, predmet proučavanja i razvoja novog metoda je vreme radnog ciklusa kao jednog od glavnih parametara performansi klase radnih mašina, označenih kao jednopozicione mašine, sa prekidnim načinom rada. Jednopozicione mašine su takve mašine kod kojih jednovremeno obrađuje (transportuje) samo jedan deo - proizvod i on je sve vreme na mašini. (Arhipov i dr. [1])

Radna sposobnost - kapacitet transportnih sistema tj. transportnih uređaja (dizalica, liftova itd.) sa prekidnim načinom rada se definiše kao:

$$Q = G_{sr} \cdot N \quad (t/\text{čas}) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu-Mašinski fakultet.

<sup>2</sup> Redovni profesor u penziji, Univerzitet u Beogradu-Mašinski fakultet.

<sup>3</sup> Student magistarskih studija, ATOS IT Solutions and Services d.o.o. Beograd.

<sup>4</sup> Vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu-Mašinski fakultet.

<sup>5</sup> Redovni profesor, Univerzitet u Beogradu-Mašinski fakultet.

gde je:

$G_{sr}(t)$  - srednji jedinični teret (koji se prenosi u jednom radnom ciklusu),

$N = 3600/T_r$  - broj obavljenih radnih ciklusa u jedinici vremena (na čas),

$T_r = \sum t_i$  (sec) - srednje vreme trajanja (jednog) radnog ciklusa,

$\sum t_i$  - vremena trajanja izvođenja nepreklopljenih operacija radnog i povratnog hoda.

Pri projektovanju transportnih sistema, mogu se dogoditi dva karakteristična slučaja uzimajući u obzir vreme trajanja radnog ciklusa:

1. Ulaz u izbor i dimenzionisanje (faze planiranja i preliminarnog projektovanja sistema), sa komotnim - većim računskim vremenom radnog ciklusa, ima za posledice:
  - veće investicije u opremu (transportne mašine); dobija se veći broj mašina ili mašina većeg kapaciteta (teža, snažnija mašina, itd.),
  - povećan broj rukovalaca i radnika na transportu,
  - manji stepen korišćenja mašina i rada.
2. Ulaz u izbor i dimenzionisanje sistema sa tesnim - manjim računskim vremenom radnog ciklusa (od onog koji se može pojaviti u konkretnom slučaju realizacije procesa), za posledicu može imati:
  - podcenjeno potrebno ulaganje u potrebnu opremu (transportne mašine),
  - formiranje uskih grla,
  - teškoće u planiranju korišćenja sistema, potreba za naknadnim (do)investiranjem,
  - produžavanje ukupnog vremena proizvodnog ciklusa, zbog zastoja u procesu, gubitaka vremena zbog čekanja na pojedine operacije itd.

Kao što je u prethodnom tekstu rečeno, performanse mašine - radni kapacitet, radna sposobnost sistema - transportne mašine, u (za)datom vremenu i uslovima rada zavise od veličine transportne jedinice i vremena trajanja radnog ciklusa. Prema izabranoj transportnoj jedinici određuje se nosivost uređaja (mašine), dok se prema položajima tačaka uzimanja materijala (pojedinih transportnih jedinica) i mestima odlaganja tog materijala, definišu operacije radnih ciklusa.

U zavisnosti od ukupnog transportnog zadatka za određeni period vremena, ukupna količina materijala koju treba premestiti sa polaznih tačaka na zadata mesta odlaganja (dotura) i kapacitet (radna moć) jedne mašine određuju broj potrebnih mašina.

Gruba formula:

Organizacija izvođenja pojedinih radnih ciklusa i izabrane brzine premeštanja materijala, odnosno izvršavanja pojedinih operacija, određuju vremena tih radnih ciklusa. Tačnije izračunavanje trajanja radnih ciklusa omogućuje pouzdani izbor teretnih jedinica, nosivosti i broja potrebnih mašina za zadati transportni zadatak.

## **Definicija radnog ciklusa**

U narednom tekstu biće definisan radni ciklus za tzv. jednopozicione mašine sa prekidnim načinom rada.

U radu svake mašine pojavljuju se međusobno povezane operacije različitog karaktera:

- operacije postavljanja materijala (predmeta rada, proizvoda, dela) na mašinu,
- operacije obrade (osnovne tehnološke),
- transportne operacije (premeštanja materijala i ljudi, definisanje putanja i brzina premeštanja),
- skidanje materijala sa mašine,

- kontrole,
- zamene alata,
- zahtevi i ograničenja za moguća preklapanja kretanja,
- spoljašnji i unutrašnji gubitci vremena,
- regulacije, itd.

Zbirno trajanje svih operacija tehnološkog procesa<sup>1</sup> - kako osnovnih, tako i pomoćnih, koje nisu međusobno preklapljeni po vremenu izvršavanja, karakteriše neophodno vreme za izvršenje tehnološkog procesa i zove se **Tehnološki ciklus mašine**- $T_t$ . Nezavisno od toga, u nizu slučajeva, moguće je utvrditi drugi važan interval vremena  $T_r$ , taj interval deli momente izlaska sa mašine dva uzastopno obrađena dela (proizvoda) i naziva se **Radni ciklus mašine** (mašine ili sistema uopšte). On predstavlja interval vremena, neophodan za izlazak sa mašine jednog dela - jednog proizvoda.

Ako se na mašini jednovremeno obrađuje samo jedan deo - proizvod, onda je vreme tehnološkog ciklusa jednako vremenu radnog ciklusa:  $T_t = T_r$

Radi kompletiranja definicija ove vrste, navodi se još jedan važan interval vremena u radu svake mašine, a to predstavlja vreme potrebno za ponavljanje položaja svi članova radnog mehanizma mašine. Taj interval se naziva **Kinematski ciklus**.

Operacije tehnološkog ciklusa mogu se obavljati: postupno (jedna za drugom); paralelno (sve operacije u isto vreme) i paralelno-postupno (određeni broj operacija se obavlja postupno, a određeni paralelno.)

U zavisnosti od gore iznetog, vreme tehnološkog, odnosno radnog ciklusa, prikazano na primeru transportnih mašina, je:

- za mašine kod kojih se predmet rada sve vreme obrade nalazi u jednom položaju-poziciji i dok se obrada jednog dela ne završi nije moguće na mašinu postaviti drugi deo:

$$T_t = T_r = t_{ps} + \Sigma t_r - \Sigma t_{pr} + \Sigma t_g, \quad (2)$$

gde je:

$t_{ps}$  - vreme postavljanja i skidanja dela,

$\Sigma t_r$  - trajanje pomeranja radnog mehanizma (vreme izvršenja pojedinih radnih operacija),

$\Sigma t_{pr}$  - vremena preklapanja izvođenja pojedinih operacija,

$\Sigma t_g$  - vremena unutrašnjih i spoljašnjih gubitaka.<sup>2</sup>

- za mašine kod kojih se sve operacije izvršavaju paralelno, tada je vreme tehnološkog, odnosno radnog ciklusa jednako:

$$T_t = T_r = t_{ps} + t_{rmax} + \Sigma t_g. \quad (3)$$

- za mašine kod kojih se operacije izvršavaju paralelno-postupno, vremena tehnološkog, odnosno radnog ciklusa se određuju kao zbir dva vremena - za postupno izvršene operacije i za paralelno izvršene operacije.

U slučajevima rada (transportnih) mašina kada se stalno ponavljaju isti tehnološki, odnosno radni procesi, analiza i optimizacija vremena radnog ciklusa, koji opredeljuje ukupni kapacitet -

<sup>1</sup> Tehnološki proces - skup (svih) osnovnih/tehnoloških operacije koje je potrebno izvršiti u obradi polaznog materijala da bi se dobio završni proizvod.

Proizvodni proces - skup (svih) osnovnih/tehnoloških i pomoćnih (transport, kontrola i dr.) operacija koje treba izvršiti da bi materijal prošao kroz ceo proces transformacije od polazne sirovine do završenog proizvoda (koji izlazi iz datog pogona, radionice, fabrike).

Proizvodni ciklus - termin obično označava ceo ciklus, odnosno obuhvata vreme od ulaska sirovine do izlaska gotovog proizvoda. Određuje koeficijent obrta kapitala, rokove isporuka i dr.

<sup>2</sup> Vanciklusni ili međuciklusni gubici utiču na stepen korišćenja mašine; npr. kad je vreme pripreme sledeće transportne jedinice duže od trajanja konkretnog tekućeg radnog ciklusa, ili iz drugih razloga koji prouzrokuju čekanje na sledeći posao.

Unutarciklusni gubici proizilaze iz procedura uključivanja pojedinih uzastopnih operacija i zavise od obučenosti rukovaoca, a mogu se smanjiti (ili čak izbeći) automatizacijom upravljanja radom mašine.

radnu moć mašine (funkcionalne performanse), se svodi na kinematsku odnosno dinamičku optimizaciju putanje kretanja transportnih jedinica – tereta.

### 3. POSTOJEĆI PRISTUPI OPTIMIZACIJI RADNOG CIKLUSA

Modeliranje rada transportnih uređaja kao što su dizalice i liftovi moguće je izvršiti uspostavljanjem analogije sa matematičkim klatnom. Optimizacija radnog ciklusa gore pomenutih transportnih uređaja može (mora) se posmatrati kako sa aspekta optimizacije vremena trajanja tako i sa aspekta zadovoljenja postavljenih uslova vezanih za okruženje u kojem posmatrani transportni uređaj radi kao i zadovoljavanja potreba za određenim režimima i maksimalnim dozvoljenim parametrima kretanja.

Ovu analogiju potvrđuju i radovi nekolicine autora, Kazak [12,13], Komarov [14], Lobov [16], koji dizalična kolica i teret modeliraju dinamičkim sistemom sa dve mase koje su međusobno povezane neistegljivim užetom. U ovim radovima se određuju zakoni oscilovanja tereta u vertikalnoj ravni, kao i povratni uticaj datih oscilacija na dinamička opterećenja sistema pri različitim zakonima promene pogonske sile dizaličnih kolica (uslovljene vrstom i režimima rada elektromotora).

Smanjivanje dinamičkih opterećenja dizaličnih sistema zahteva prigušenje ili u što većoj meri eliminisanje oscilacija tereta, kako u nestacionarnim (ubrzanje, kočenje) tako i u stacionarnim režimima kretanja dizaličnih kolica tj. optimizaciju radnog ciklusa.

Zadatak smanjivanja dinamičkih opterećenja dizaličnih sistema, primenom navedene analogije svodi se na rešavanje sledeća dva zadatka o premeštanju matematičkog klatna i to:

-prvi: premeštanje matematičkog klatna iz stanja mirovanja na zadato rastojanje sa prigušenjem oscilacija na kraju procesa, i

-drugi: premeštanje matematičkog klatna iz stanja mirovanja (period ubrzanja) ili kretanja konstantnom brzinom (period kočenja) u stanje ravnomernog kretanja zadatom brzinom ili stanje mirovanja sa prigušenjem oscilacija na kraju procesa.

Zaremba [30] rešava "prvi" zadatak o premeštanju matematičkog klatna konstantne dužine za minimalno vreme, kome su brzina i ubrzanje (upravljačke veličine) ograničene po apsolutnoj vrednosti. Chiong [8], uzimajući brzinu tačke vešanja, ograničenu po apsolutnoj vrednosti, za upravljačku veličinu dobija rešenja za "prvi" i "drugi" zadatak premeštanja pri kretanju klatna kroz viskoznu sredinu za minimalno vreme. Bolotnik i Chiong [6], rešavaju "prvi" zadatak o premeštanju matematičkog klatna promenljive dužine uzimajući za upravljačku veličinu pogonsku silu ograničenu po apsolutnoj vrednosti.

Drugi pristup rešavanju zadataka o premeštanju matematičkog klatna jeste primenom Pontrjagin-ovog principa maksimuma [22]. Sokolov [27], određuje primenom principa maksimuma, uzimajući ubrzanje ograničeno po apsolutnoj vrednosti za upravljačku veličinu, da u zadatom trenutku izborom vrednosti upravljanja, vrednost funkcionala koji predstavlja energiju matematičkog klatna, bude maksimalna (minimalna). Karihaloo i Parbery [11], rešavaju "prvi" zadatak o premeštanju matematičkog klatna uzimajući pogonsku silu za upravljačku veličinu, primenom principa maksimuma. Funkcional koji u ovom slučaju treba minimizirati na zadatom vremenskom intervalu jeste upravo sama upravljačka veličina tj. kvadrat pogonske sile. Zrnić, Bugarić i Vuković [31], primenom principa maksimuma rešavaju "drugi" zadatak o premeštanju matematičkog klatna, uzimajući ubrzanje za upravljačku veličinu. Funkcional koji na zadatom vremenskom intervalu treba minimizirati je zbir kvadrata ugla otklona, ugaone brzine otklona i upravljanja tj. ubrzanja.

Kvalitativno drugačiji pristup rešavanju problema smanjivanja dinamičkih opterećenja dizaličnih sistema tj. prigušivanju oscilacija pri kretanju dizaličnih kolica i tereta srećemo u radovima: Auering [2,3], Unbehauen et al. [28], Schwardtmann [23]. Autori ovih radova na bazi poznatih karakteristika dizaličnih sistema i njihovih dinamičkih modela, modeliraju upravljačke sisteme i određuju režime rada pogonskih mehanizama sa ciljem prigušivanja oscilacija, tj.

automatizacije dizaličnih postrojenja. Drugim rečima, automatizacija dizaličnih postrojenja je izvodljiva jedino ukoliko je moguće kontrolisati oscilovanje tereta (matematičkog klana).

Jedan od mogućih načina optimizacije radnog ciklusa prikazan je u radovima: Hyde i Seering [9], Singer i Seering [24,25,26] koji razvijaju generalnu teoriju o prigušivanju oscilacija kod mehaničkih (fleksibilnih) sistema, baziranu na zadavanju odgovarajućeg, željenog ulaza u sistem (input shaping). Takav željeni ulaz primenjuju ne samo u sprezi sa otvorenim sistemima (open loop) nego i u sprezi sa zatvorenim sistemima (closed loop systems). Ovaj pristup je razvijen u Massachusetts Institute of Technology (MIT).

U radovima Noakes et al. [19,20], Noakes i Jansen [18] i Kress et al. [15] prikazana je primena generalne teorije prigušivanja oscilacija, razvijene u MIT, na prigušivanje oscilacija tereta okačenog o uže koji se transportuje mosnim dizalicama. Takav teret predstavlja klatno koje može slobodno da osciluje (da se ljulja) u toku transporta i čije se oscilacije prigušuju. Ovaj način prigušivanja oscilacija primenjen je i izveden u Oak Ridge National Laboratory (ORNL).

Takođe je potrebno pomenuti istraživanja sprovedena u Sandia National Laboratories (SNL), u kojima se pokazuje da je moguće prigušiti oscilacije tereta okačenog o uže ako konstantno ubrzanje/usporenje traje koliko i period prirodnih oscilacija tereta, odnosno ako se na odgovarajući način programira ubrzanje/usporenje kрана. Ovi algoritmi ustvari predstavljaju otvorene sisteme. Rezultati istraživanja i primene mogu naći u radu Jones i Petterson [10].

Moustafa i Ebeid [17] su razvili nelinearni model mosne dizalice kojim se razmatra istovremeno kretanje kolica i glavnog nosača dizalice. Takođe su razvili upravljački sistem za prigušivanje oscilacija baziran na sistemu sa povratnom spregom radi određivanja brzine dizalice u svakom trenutku.

Gore navedeni radovi zasnivaju se na tzv. digitalnom, analognom i adaptivnom načinu prigušivanja oscilacija (Carbon [7]).

*Zajednička karakteristika svih prikazanih načina optimizacije radnih ciklusa je ta da se prilikom optimizacije (optimalnog upravljanja kretanjem) razmatrao celokupan mehanički sistem, koji uključuje sam teret koji se transportuje kao i mehanizme uređaja koji to kretanje ostvaruju.*

#### 4. SUŠTINA TEHNIČKOG REŠENJA

Određivanje optimalnog upravljanja kretanjem mehaničkih sistema u osnovi se svodi na rešavanje dvotačkastog graničnog problema. U najvećem broju slučajeva ti problemi su nelinearne prirode što dovodi do problema pri njihovom rešavanju (linearizacija pri analitičkom rešavanju ili primena numeričkih metoda).

Osnovna karakteristika nove metode za optimizaciju kretanja – radnog ciklusa je ta da se vrši dekompozicija mehaničkog sistema i da se sama optimizacija kretanja – radnog ciklusa vrši u dve faze. Kretanje tereta okačenog o uže (prva faza optimizacije) i rad mehanizama transportnog uređaja (koji treba da ostvare tj. omoguće optimalno kretanje tereta okačenog o uže – druga faza optimizacije) se analiziraju odvojeno. Jedina fizička veza između tereta i mehanizama transportnog uređaja (ona koja omogućuje da se izvrši dekompozicija) je uže tj. sila u užetu. Konkretno optimizacija radnog ciklusa jednopozicionih transportnih mašina sa prekidnim načinom rada sastoji se u sledećem:

- Prva faza – određivanje optimalnog kretanja tereta. Rezultati prve faze optimizacije: optimalna trajektorija tereta okačenog o uže (pozicija, brzine, ubrzanja itd) i sila u užetu, dobijeni su na osnovu zahtevanih uslova (početnih, konturnih, vezanih za vreme, geometriju sistema, režime kretanja, maksimalne dozvoljene vrednosti parametara kretanja itd.) koje kretanje tereta treba da zadovolji. Za rešavanje problema optimalnog kretanja tereta predlaže se primena principa maksimuma (što daje značajne prednosti – opisano u narednom tekstu), ali i primena drugih metoda optimizacije (npr. varijacioni račun ili dinamičko programiranje) nije isključena.
- Druga faza – određivanje promene sila (momenata) pogonskih mehanizama potrebnih za ostvarivanje optimalno kretanje tereta. Sama druga faza optimizacije predstavlja tzv. direktan

zadatak dinamike vezano za mehanizam koji obezbeđuje traženo kretanje. Na osnovu izlaznih (optimalnih) parametara kretanja prve faze optimizacije, u zavisnosti od konstrukcije transportnog uređaja (sistema diferencijalnih jednačina u opštem slučaju), određuju se promene sila (momenata) potrebnih da se zahtevano optimalno kretanje tereta ostvari.

Prednosti primene nove metode optimizacije radnog ciklusa jednopozicionih transportnih mašina sa prekidnim načinom rada u odnosu na postojeće postupke optimizacije su sledeće:

1. Isto rešenje optimalnog kretanja tereta okačenog o uže može se primeniti za bilo koju transportnu mašinu koja može da ostvari zahtevano kretanje tereta (npr. pretovarni most, lučka dizalica).
2. Zahtevani nivo složenosti pri modeliranju strukture transportnog uređaja i pogonskih mehanizama, za isto optimalno rešenje kretanja tereta, zavisi od namene i traženih parametara koji se zahtevaju kao izlaz iz druge faze optimizacije.
3. Projektant transportnog uređaja može da izabere koje će parametre uključiti (uzeti u obzir) pri optimizaciji kretanja tereta (prva faza) u zavisnosti od namene tj. okruženja u kojem će transportni uređaj raditi i uslova koje kretanje tereta treba da zadovolji, za isti nivo složenosti modela strukture samog uređaja (npr. teretni lift, putnički odnosno bolnički lift).
4. Izborom principa maksimuma pri optimizaciji kretanja tereta (prva faza) navedeni problem predstavlja problem optimalnog upravljanja linearnih sistema sa kvadratnim funkcionalom, čija je značajna prednost u mogućnosti dobijanja analitičkih rešenja diferencijalnih jednačina osnovnog i spregnutog sistema, pri čemu se ne mora vršiti linearizacija ishodno nelinearnih diferencijalnih jednačina kretanja.
5. Generalno, veoma komplikovano rešavanje nelinearnih dvotačkastih graničnih problema primenom nove metode se svodi na rešavanje linearnih problema (prva faza) bez gubitka opštosti – nelinearnosti (direktan zadatak dinamike – druga faza).

## **5. PRIKAZ REZULTATA PRIMENE**

Objašnjenje problema i ciljeva ove metode, daje se na primerima konkretnih tehničkih sistema - projektovanja i konstruisanja transportnih sistema određene klase, dok se zaključci mogu proširiti na celu klasu jednopozicionih mašina sa prekidnim načinom rada.

### **5.1. Optimizacija kretanja – radnog ciklusa transportnih uređaja pri istovaru rasutih tereta**

Radni ciklus transportnih uređaja pri istovaru rasutih tereta u lukama sastoji se iz dva dela tj. iz mauealnog dela gde kontrolu nad kretanjem tereta ima rukovaoc dizalice i automatskog dela gde kontrolu nad kretanjem tereta ima računar. Manuelni deo se sastoji iz spustanja prazne otvorene grabilice iz jedne od tri tačke početka/završetka manuelnog/automatskog dela ciklusa (slike 1a i 1b) do materijala u plovilu, zahvatanja materijala, podizanja zatvorene grabilice do jedne od tri tačke početka/završetka manuelnog/automatskog dela ciklusa. Nakon toga počinje automatski deo ciklusa koji se sastoji iz transfera grabilice sa materijalom do bunkera na samoj dizalici, istovara materijala i povratnog kretanja prazne otvorene grabilice do jedne od tri tačke početka/završetka manuelnog/automatskog dela ciklusa [21].

Optimizacija kretanja se odnosi samo na automatski deo istovarnog ciklusa gde kontrolu nad kretanjem tereta ima računar.

#### **Matematički modeli**

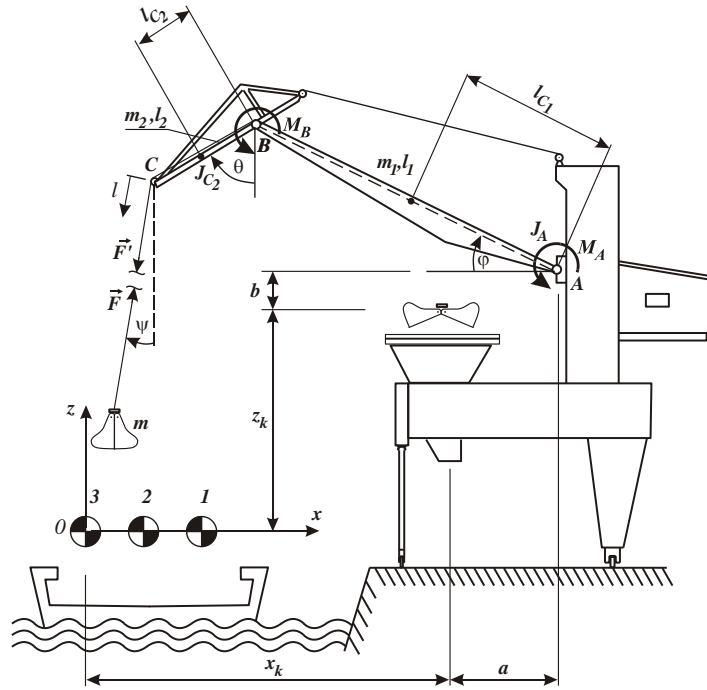
Na primeru optimizacije kretanja – radnog ciklusa transportnih uređaja (pretovarni most, lučka dizalica) koji mogu da se koriste za istovar rasutih tereta u lukama biće prikazane prednosti primene nove metode optimizacije (1, 4, 5 – videti poglavlje 4).

Slike 1a i 1b prikazuju uprošćene šeme transportnih uređaja sa grabilicom (za istovar rasutih tereta) na osnovu kojih je postavljen matematički model.

Uprošćena šema lučke dizalice je prikazana na slici 1a [29], gde su:  $\varphi$  i  $\theta$  - generalisane koordinate,  $m$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  - mase tereta i grabilice i mase odgovarajućih delova konstrukcije dizalice,  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_{c1}$ ,  $l_{c2}$  - dužina užeta i dužine odgovarajućih delova konstrukcije dizalice,  $J_A$ ,  $J_{c2}$  - momenti inercije odgovarajućih delova konstrukcije dizalice,  $x_k$ ,  $z_k$ ,  $a$ ,  $b$  - geometrija sistema,  $\psi$  - ugao otklona užeta,  $F$  - sila u užetu,  $M_A$ ,  $M_B$  - pogonski momenti svedeni na tačke A i B (određivanje stvarnih pogonskih momenata zahteva dekompoziciju pogonskih sistema dizalice koja nije ista kod svih lučkih dizalica što zavisi od proizvođača).

Diferencijalne jednačine koje opisuju kretanje mehanizama lučke dizalice su prikazane sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 (J_A + m_2 l_1^2) \ddot{\varphi} - [m_2 l_1 l_{c2} \sin(\varphi - \theta)] \ddot{\theta} + [m_2 l_1 l_{c2} \cos(\varphi - \theta)] \dot{\theta}^2 &= \\
 = M_A - m_1 g l_{c1} \cos \varphi - m_2 g l_1 \cos \varphi - F l_1 \cos(\psi - \varphi), & \\
 - [m_2 l_1 l_{c2} \sin(\varphi - \theta)] \ddot{\varphi} + (J_{c2} + m_2 l_{c2}^2) \ddot{\theta} - [m_2 l_1 l_{c2} \sin(\varphi - \theta)] \dot{\varphi}^2 &= \\
 = M_B + m_2 g l_{c2} \sin \theta + F l_2 \sin(\psi - \theta). &
 \end{aligned}
 \tag{4a}$$



Slika 1a. Uprošćena šema lučke dizalice.

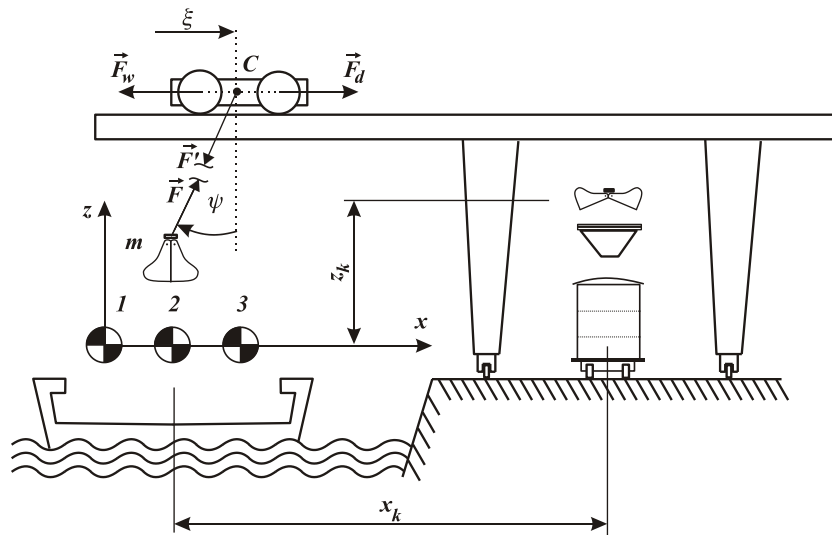
Uprošćena šema pretovarnog mosta je prikazana na slici 1b [5], gde su:  $\xi$  - generalisana koordinata,  $m$ ,  $m_1$  - mase tereta i masa dizaličnih kolica,  $l$  - dužina užeta,  $x_k$ ,  $z_k$ ,  $z_t$  - geometrija sistema,  $\psi$  - ugao otklona užeta,  $F$  - sila u užetu,  $F_d$  - pogonska sila.

Diferencijalna jednačina koja opisuje kretanje kolica pretovarnog mosta je data izrazom 4b i glasi:

$$m_1 \cdot \ddot{\xi} = F_d - F \cdot \sin \psi \tag{4b}$$

gde je:  $\xi = x + l \cdot \sin \psi$ ,  $l = (z_t - z) / \cos \psi$  tj.  $\xi = x + (z_t - z) \cdot \tan \psi$ .

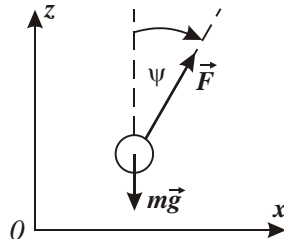




Slika 1b. Uprošćena šema pretovarnog mosta.

### Optimizacija kretanja tereta - I faza optimizacije

Kretanje tereta je pogodno analizirati u koordinatnom sistemu  $xOz$  (slika 2). Na početku kretanja teret se nalazi u tački  $O$ .



Slika 2. Sile koje deluju na teret.

U tom slučaju diferencijalne jednačine koje opisuju kretanje tereta su:

$$m\ddot{x} = F \sin \psi, \quad m\ddot{z} = F \cos \psi - mg, \quad \frac{F}{m} = S, \quad (5)$$

$$\ddot{x} = S \sin \psi, \quad \ddot{z} = S \cos \psi - g,$$

Teret, za unapred poznati vremenski interval  $[0, t_c]$ , iz početnog stanja

$$t = 0, \quad x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad (6)$$

$$z(0) = 0; \quad \dot{z}(0) = 0;$$

treba prebaciti u krajnje stanje:

$$t = t_c, \quad x(t_c) = x_k; \quad \dot{x}(t_c) = 0; \quad (7)$$

$$z(t_c) = z_k; \quad \dot{z}(t_c) = 0;$$

sa ograničenjem da teret treba da prođe kroz tačku  $(x_k/2, z_k)$  i nakon toga da se kreće horizontalno tj.

$$x(\tau) = x_k / 2; \quad z(\tau) = z_k; \quad z(\tau \leq t \leq t_c) = z_k, \quad (8)$$

gde vremenski trenutak  $\tau$  nije unapred poznat.

Ako je moguće odrediti funkcije oblika  $\psi(t), S(t) > 0$ , koje zadovoljavaju uslove:

$$\psi(0) = 0; \quad \dot{\psi}(0) = 0; \quad S(0) = g \quad (9)$$

$$\psi(t_c) = 0; \quad \dot{\psi}(t_c) = 0; \quad S(t_c) = g'$$

na takav način da odgovarajuće rešenje jednačina (5) zadovoljava uslove (6), (7) i (8) sistemom je moguće upravljati.

Povećavanjem reda diferencijalnih jednačina (5) te jednačine se mogu napisati kao:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \dot{S} \sin \psi + S \dot{\psi} \cos \psi \\ \ddot{z} &= \dot{S} \cos \psi - S \dot{\psi} \sin \psi\end{aligned}\quad (10)$$

dok se uslovi (9) mogu napisati kao:

$$\begin{aligned}\dot{x}(0) &= 0; \quad \ddot{x}(0) = 0; \quad \ddot{z}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_c) &= 0; \quad \ddot{x}(t_c) = 0; \quad \ddot{z}(t_c) = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Na ovaj način zadatak upravljanja kretanjem tereta može se postaviti u sledećem obliku:

$$x^{IV} = u_x, \quad z^{IV} = u_z \quad (12)$$

$$\begin{aligned}x(0) &= 0; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \ddot{x}(0) = 0; \quad \ddot{z}(0) = 0; \\ z(0) &= 0; \quad \dot{z}(0) = 0; \quad \ddot{z}(0) = 0; \\ x(t_c) &= x_k; \quad \dot{x}(t_c) = 0; \quad \ddot{x}(t_c) = 0; \quad \ddot{z}(t_c) = 0; \\ z(t_c) &= z_k; \quad \dot{z}(t_c) = 0; \quad \ddot{z}(t_c) = 0; \\ x(\tau) &= x_k / 2; \quad z(\tau) = z_k; \quad z(\tau \leq t \leq t_c) = z_k\end{aligned}\quad (13)$$

gde su  $u_x$  i  $u_z$  dozvoljene vrednosti upravljanja.

Uvođenjem novih promenljivih  $y_i$  ( $i=1,2, \dots, 8$ ) sistem (12) i ograničenja (13) se mogu napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2; \quad \dot{y}_2 = y_3; \quad \dot{y}_3 = y_4; \quad \dot{y}_4 = u_x; \\ \dot{y}_5 &= y_6; \quad \dot{y}_6 = y_7; \quad \dot{y}_7 = y_8; \quad \dot{y}_8 = u_z\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 0; \quad y_2(0) = 0; \quad y_3(0) = 0; \quad y_4(0) = 0; \\ y_5(0) &= 0; \quad y_6(0) = 0; \quad y_7(0) = 0; \\ y_1(t_c) &= x_k; \quad y_2(t_c) = 0; \quad y_3(t_c) = 0; \quad y_4(t_c) = 0; \\ y_5(t_c) &= z_k; \quad y_6(t_c) = 0; \quad y_7(t_c) = 0; \\ y_1(\tau) &= x_k / 2; \quad y_5(\tau) = z_k; \quad y_5(\tau \leq t \leq t_c) = z_k\end{aligned}\quad (15)$$

što omogućuje direktnu primenu principa maksimuma, gde su  $u_x$  i  $u_z$  vrednosti upravljanja u  $x$  i  $z$  pravcu.

U toku radnog ciklusa zahtevaju se minimalni uglovi otklona užeta kao i maksimalno jedna oscilacija u toku kretanja. Pored toga, promene vrednosti sile u užetu kao rezultat premeštanja tereta je poželjno redukovati na minimum. U tom svetlu uslov optimalnosti je sledećeg oblika:

$$J = \int_0^{t_c} \frac{1}{2} (y_3^2 + y_4^2 + u_x^2 + y_8^2) dt \rightarrow \inf \quad (16)$$

Diferencijalne jednačine (14) i uslovi (15) zajedno sa uslovom optimalnosti (16) predstavljaju zadatak optimalnog upravljanja, napisan u formi koja omogućuje direktnu primenu principa maksimuma. Uzimajući u obzir izraze (14) i (16) formira se funkcija:

$$\begin{aligned}H &= -\frac{1}{2} (y_3^2 + y_4^2 + u_x^2 + y_8^2) + \\ &+ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_3 + \lambda_3 y_4 + \lambda_4 u_x + \lambda_5 y_6 + \lambda_6 y_7 + \lambda_7 y_8 + \lambda_8 u_z\end{aligned}\quad (17)$$

gde vrednosti  $\lambda_i$  zadovoljavaju sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i = 1, \dots, 8), \\ \dot{\lambda}_1 &= 0; \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1; \quad \dot{\lambda}_3 = y_3 - \lambda_2; \quad \dot{\lambda}_4 = y_4 - \lambda_3; \\ \dot{\lambda}_5 &= 0; \quad \dot{\lambda}_6 = -\lambda_5; \quad \dot{\lambda}_7 = -\lambda_6; \quad \dot{\lambda}_8 = y_8 - \lambda_7.\end{aligned}\quad (18)$$

Prema teoremi principa maksimuma, funkcija (17) za optimalno rešenje ima maksimalnu vrednost. U skladu sa traženim uslovima optimalnosti:

$$\frac{\partial H}{\partial u_x} = 0 \text{ i } \frac{\partial H}{\partial u_z} = 0 \quad (19)$$

upravljanja u  $x$  i  $z$  pravcu se dobijaju kao:

$$-u_x + \lambda_4 = 0 \rightarrow u_x = \lambda_4; \quad \lambda_8 = 0 \rightarrow \dot{\lambda}_8 = 0 \rightarrow y_8 = \lambda_7 \quad (20)$$

Sledeći uslovi se trebaju dodati uslovima (15):

$$\lambda_8(0) = 0; \quad \lambda_8(t_c) = 0$$

što je trivijalno zadovoljeno u (20).

Struktura sistema diferencijalnih jednačina (14) i (18) pokazuje da je moguće optimizaciju kretanja tereta u  $x$  i  $z$  pravcu razmatrati odvojeno. Sistem diferencijalnih jednačina za optimizaciju kretanja tereta u  $x$  pravcu je sledećeg oblika:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \quad \dot{y}_2 = y_3; \quad \dot{y}_3 = y_4; \quad \dot{y}_4 = \lambda_4; \\ \dot{\lambda}_1 &= 0; \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1; \quad \dot{\lambda}_3 = y_3 - \lambda_2; \quad \dot{\lambda}_4 = y_4 - \lambda_3 \end{aligned} \quad (21)$$

Konturni uslovi u  $x$  pravcu su:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad y_1(0) = 0; \quad y_2(0) = 0; \quad y_3(0) = 0; \quad y_4(0) = 0; \\ t = t_c, \quad y_1(t_c) = x_k; \quad y_2(t_c) = 0; \quad y_3(t_c) = 0; \quad y_4(t_c) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Sistem diferencijalnih jednačina za optimizaciju kretanja tereta u  $z$  pravcu je sledećeg oblika:

$$\begin{aligned} \dot{y}_5 &= y_6; \quad \dot{y}_6 = y_7; \quad \dot{y}_7 = y_8; \quad \dot{y}_8 = -\lambda_6; \\ \dot{\lambda}_5 &= 0; \quad \dot{\lambda}_6 = -\lambda_5; \quad \dot{\lambda}_7 = -\lambda_6; \quad \dot{\lambda}_8 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Konturni uslovi u  $z$  pravcu su:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad y_5(0) = 0; \quad y_6(0) = 0; \quad y_7(0) = 0; \quad \lambda_8(0) = 0; \\ t = \tau, \quad y_5(\tau) = z_k; \quad y_6(\tau) = 0; \quad y_7(\tau) = 0; \quad \lambda_8(\tau) = 0; \\ \tau \leq t \leq t_c \quad y_5(t) = z_k; \quad y_6(t) = 0; \quad y_7(t) = 0; \quad \lambda_8(t) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Svaki od sistema diferencijalnih jednačina (21) i (23), zajedno sa uslovima (22) i (24) predstavljaju dvotačkasti granični problem. Konfiguracija sistema diferencijalnih jednačina (21) i (23) omogućuje da se svaki od njih reši analitički.

Optimalna rešenja za kretanje tereta u  $x$  pravcu su sledećeg oblika:

$$y_1 = x = (A_1 e^{\sqrt{3}t/2} + B_1 e^{-\sqrt{3}t/2}) \cos(t/2) + (C_1 e^{\sqrt{3}t/2} + D_1 e^{-\sqrt{3}t/2}) \sin(t/2) + E_1 t^3 + F_1 t^2 + G_1 t + H_1$$

$$y_2 = \dot{x} = 0.5 \left[ \sqrt{3}(-B_1 + A_1 e^{\sqrt{3}t}) \cos(t/2) + (D_1 + C_1 e^{\sqrt{3}t}) \cos(t/2) - (B_1 + A_1 e^{\sqrt{3}t}) \sin(t/2) + \sqrt{3}(-D_1 + C_1 e^{\sqrt{3}t}) \sin(t/2) \right] e^{-\sqrt{3}t/2} + 3E_1 t^2 + 2F_1 t + G_1$$

$$y_3 = \ddot{x} = 0.5 \left[ (B_1 + A_1 e^{\sqrt{3}t}) \cos(t/2) + \sqrt{3}(-D_1 + C_1 e^{\sqrt{3}t}) \cos(t/2) + \sqrt{3}(B_1 - A_1 e^{\sqrt{3}t}) \sin(t/2) + (D_1 + C_1 e^{\sqrt{3}t}) \sin(t/2) \right] e^{-\sqrt{3}t/2} + 6E_1 t + 2F_1$$

$$y_4 = \ddot{\lambda}_4 = \left[ D_1 \cos(t/2) + C_1 e^{\sqrt{3}t} \cos(t/2) - A_1 e^{\sqrt{3}t} \sin(t/2) - B_1 \sin(t/2) \right] e^{-\sqrt{3}t/2} + 6E_1$$

$$\dot{y}_4 = x^{IV} = u_x = 0.5 \left[ -(B_1 + A_1 e^{\sqrt{3}t}) \cos(t/2) + \sqrt{3}(-D_1 + C_1 e^{\sqrt{3}t}) \cos(t/2) + \sqrt{3}(B_1 - A_1 e^{\sqrt{3}t}) \sin(t/2) - (D_1 + C_1 e^{\sqrt{3}t}) \sin(t/2) \right] e^{-\sqrt{3}t/2}$$

gde su  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$  konstante koje treba odrediti na osnovu konturnih uslova (6) i (7).

Optimalna rešenja za kretanje tereta u z pravcu su sledećeg oblika:

$$\dot{y}_8 = z^{IV} = u_z = A_2 t + B_2$$

$$y_8 = \ddot{z} = \frac{1}{2} A_2 t^2 + B_2 t + C_2$$

$$y_7 = \dot{z} = \frac{1}{6} A_2 t^3 + \frac{1}{2} B_2 t^2 + C_2 t + D_2 \quad y_6 = \dot{z} = \frac{1}{24} A_2 t^4 + \frac{1}{6} B_2 t^3 + \frac{1}{2} C_2 t^2 + D_2 t + E_2$$

$$y_5 = z = \frac{1}{120} A_2 t^5 + \frac{1}{24} B_2 t^4 + \frac{1}{6} C_2 t^3 + \frac{1}{2} D_2 t^2 + E_2 t + F_2$$

gde su  $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$  konstante koje treba odrediti na osnovu konturnih uslova (15).

Direktno iz sistema diferencijalnih jednačina (5) izrazi za  $\psi$  i  $S$  se dobijaju kao:

$$\psi = \arctg \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} + g}, \quad S = \sqrt{\ddot{x}^2 + (\ddot{z} + g)^2}.$$

### Optimalno kretanje mehanizama lučke dizalice – II faza optimizacije

Na osnovu prikazane koncepcije kretanja tereta, veza između kretanja tereta i kretanja vrha dizalice može se uspostaviti kao:

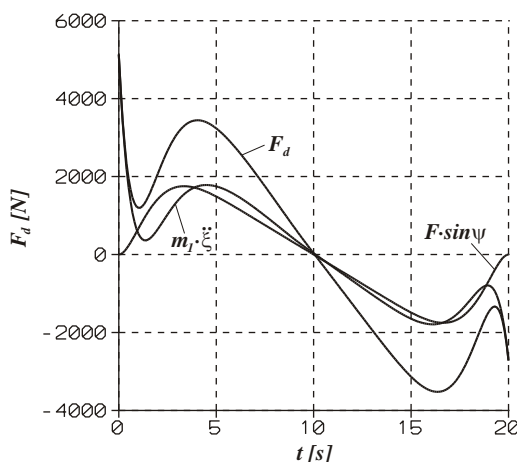
$$l_1 \cos \varphi + l_2 \sin \theta + l \sin \psi + x - x_k - a = 0$$

$$l_1 \sin \varphi - l_2 \cos \theta - l \cos \psi - z + z_k + b = 0.$$

Kako je posmatrani sistem redundantan, promena npr. dužine užeta  $l$  se može pretpostaviti kao funkcija vremena, što generalno zavisi od konstrukcionih karakteristika dizalice (karakteristike pogonskih mehanizama razlikuju se u zavisnosti od proizvođača). Problem se sada svodi na direktan zadatak dinamike i promena momenata  $M_A$  i  $M_B$  se određuje iz sistema diferencijalnih jednačina (4a) na osnovu optimalnog kretanja tereta (I faza optimizacije).

### Optimalno kretanje kolica pretovarnog mosta – II faza optimizacije

Kako je konstrukcija pretovarnog mosta relativno manje kompleksna nego konstrukcija lučke dizalice, pogonska sila  $F_d$  može se odrediti direktno iz diferencijalne jednačine (4b) na osnovu optimalnog kretanja tereta (I faza optimizacije) kao direktan zadatak dinamike. Promene pogonske sile  $F_d$  u vremenu na osnovu diferencijalne jednačine (4b) izračunata je na osnovu sledećih vrednosti:  $z_l = 17 \text{ m}$ ,  $m_l = 15000 \text{ kg}$ ,  $m = 12500 \text{ kg}$  i prikazana je na slici 3.



Slika 3. Promena pogonske sile kolica pretovarnog mosta.

Radi dobijanja ukupnog vremena trajanja istovarnog ciklusa na vreme automatskog dela istovarnog ciklusa, optimalnog u smislu geometrije sistema i režima rada mehanizama, potrebno je dodati vreme pražnjenja grabilice, kao i vreme manualnog dela istovarnog ciklusa.

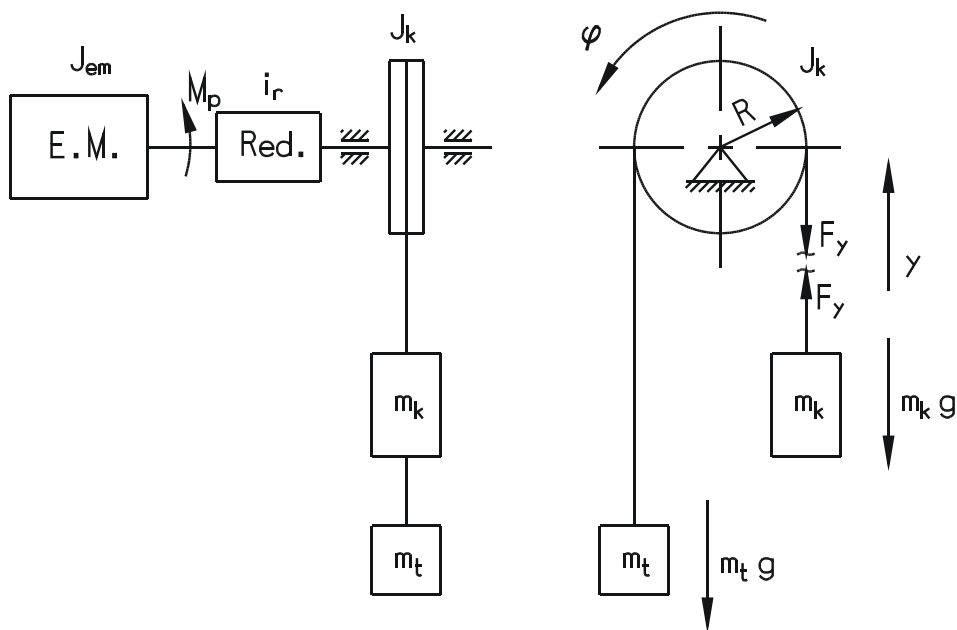
## 5.2. Optimizacija kretanja - radnog ciklusa kabine lifta

Kako se radni ciklusi kabine lifta po pravilu međusobno razlikuju, jedino je moguće odrediti tzv. srednji radni ciklus kabine lifta (primenom npr. simulacije) na osnovu maksimalnih dozvoljenih parametara kretanja (brzina, ubrzanje, trzaj) i optimalnih dozvoljenih režima kretanja kabine koji se ponavljaju u toku svakog radnog ciklusa kabine lifta.

Na primeru optimizacije režima kretanja kabine lifta biće prikazane prednosti primene nove metode optimizacije (2, 3, 4, 5 – videti poglavlje 4).

### Matematički model

Dinamički model lifta prikazan na slici 4, je jedan od jednostavnijih jer npr. krutost užeta nije uzimana u razmatranje, tako da sistem ima samo jedan stepen slobode. Model obuhvata mase kabine i kontratega, moment inercije užetnjače kao i momente inercija obrtnih masa pogona lifta (elektromotor, reduktor).



Slika 4. Uprošćena šema lifta.

Oznake korišćene na slici 4 imaju sledeće značenje:  $m_k$  - masa kabine lifta,  $m_t$  - masa kontratega,  $R$  - poluprečnik užetnjače,  $J_k$  - moment inercije užetnjače,  $J_{em}$  - moment inercije rotora elektromotora,  $i_r$  - prenosni odnos reduktora,  $\varphi$  - ugao obrtanja užetnjače,  $y$  - generalisana koordinata,  $M_p$  - pogonski moment.

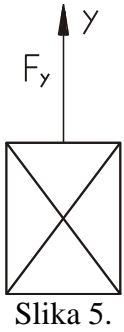
Diferencijalne jednačine koje opisuju kretanje lifta čija je šema data na slici 4 (napisane u obliku pogodnom za primenu nove metode – dekomponovan sistem) su:

$$\left[ m_t + \frac{1}{R^2} \cdot (J_k + i_r^2 \cdot J_{em}) \right] \cdot \ddot{y} = m_t \cdot g + \frac{M_p}{R} \cdot i_r - F_y \quad (25)$$

$$m_k \cdot \ddot{y} = F_y - m_k \cdot g$$

### Optimizacija kretanja kabine teretnog lifta - I faza optimizacije

U slučaju teretnog lifta nije potrebno voditi računa o komforu transporta liftom jer se istim transportuje teret u nekim slučajevima sa pratiocem koji je radno sposoban čovek. Drugim rečima nije potrebno da pokretanja i zaustavljanja kabine lifta budu potpuno bez trzanja, što vodi ka jednostavnijim i jeftinijim upravljačkim sistemima (upravljanje ubrzanjem). [4]



Zadatak određivanja optimalnog kretanja kabine teretnog lifta rešavaće se primenom principa maksimuma. Diferencijalne jednačine koje opisuju kretanje kabine lifta (slika 5) mogu se napisati u sledećem obliku:

$$\dot{y} = v, \quad \dot{v} = a \quad (26)$$

Za upravljačku veličinu uzeto je ubrzanje ograničeno po apsolutnoj vrednosti, dok će brzina moći da uzima vrednosti od nule do neke unapred zadate pozitivne vrednosti tj.:

$$u = a, \quad |u| \leq K, \quad 0 \leq v \leq V^* \quad (27)$$

Problem se sastoji u određivanju takvog upravljanja  $u^0$  za koje će sistem u toku kretanja u jednom smeru iz početnog stanja:

$$t = t_0, \quad y(t_0) = 0, \quad v(t_0) = 0, \quad (28a)$$

doći u stanje:

$$t = t_k, \quad y(t_k) = dh, \quad v(t_k) = 0, \quad (28b)$$

za najkraće (optimalno) vreme  $t_k$ . Veličina  $dh$  predstavlja, u ovom slučaju, zadata visinu (put u y pravcu) koju treba ostvariti.

Jedinstveno upravljanje je određeno zahtevom:

$$t_k \rightarrow \inf_u \Rightarrow \int_{t_0}^{t_k} dt \rightarrow \inf_u \quad (29)$$

Problem definisan relacijama (26) - (26) sveden je na oblik koji omogućuje direktnu primenu principa maksimuma. Saglasno izrazima (26) i (26) formira se funkcija oblika:

$$H = -1 + \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot u \quad (30)$$

gde veličine  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} \quad \text{ili} \\ \dot{\lambda}_1 &= 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{aligned} \quad (31)$$

Prema teoremi principa maksimuma funkcija  $H$  na optimalnom rešenju ima maksimalnu vrednost tj.

$$\forall t \in [t_0, t_k] \quad H \leq \sup_u H = (H)_{u^0} = H_0 \rightarrow u^0 \quad (32)$$

Rešenja sistema diferencijalnih jednačina (31) su:

$$\lambda_1 = L_1, \quad \lambda_2 = -L_1 \cdot t + L_2 \quad (33)$$

gde su  $L_1$  i  $L_2$  konstante.

Uslov koji moraju da zadovolje veličine  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  je da neka od veličina  $\lambda_i$  ( $i=1,2$ ) u svakom trenutku mora biti veća od nule, tj.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t \in [t_0, t_k]. \quad (34)$$

Ako se optimalno rešenje  $u^0$  traži unutar oblasti dopustivih upravljanja, tj. u oblasti  $|u| \leq K$ , tada je za (32) potreban uslov:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

S obzirom na (30) i (31) iz gornjeg uslova sledi da je istovremeno:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0,$$

što je u suprotnosti sa uslovom (34) principa maksimuma. Prema tome optimalno upravljanje treba tražiti na granici ( $|u| \leq K$ ) dopustivih upravljanja. U tom slučaju, uslov (32) će biti ispunjen ako je

$u^0 = K \cdot \text{sign} \lambda_2$ . Izuzetak predstavlja ako je na konačnom intervalu  $v=V^*$  kada je  $u^0=0$ . U opštem slučaju struktura optimalnog upravljanja ima oblik:

$$u^0 = \begin{cases} K \cdot \text{sign} \lambda_2 & v < V^* \\ 0 & v = V^* \end{cases} \quad (35)$$

Iz gore navedenog funkcija  $\lambda_2(t)$  igra ključnu ulogu u određivanju optimalnog upravljanja. Polazeći od činjenice da je  $a(0)>0$  za ( $h>0$ ) odnosno  $u^0(0)=K$ , s obzirom na (33) i (35), dobija se da je  $\lambda_2(0)=L_2 > 0$ , što sledi iz (32) za  $t_0 = 0$  tj.

$$(H^0)_{t_0} = -1 + L_2 \cdot K = 0 \Rightarrow L_2 = \frac{1}{K}. \quad (36)$$

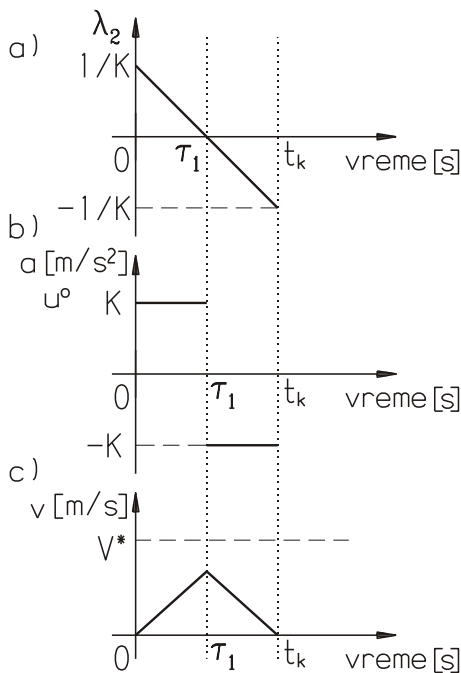
Pored toga uslov iz (32) u trenutku  $t_k$  se svodi na:

$$(H^0)_{t_k} = -1 + \lambda_2(t_k) \cdot u^0(t_k) = 0 \Rightarrow |\lambda_2(t_k)| = \frac{1}{K} \quad (37)$$

Pošto je  $\lambda_2(t)$  linearna funkcija i shodno ograničenjima (28a) i (28b), u opštem slučaju, uvek postoji početni interval  $[t_0, \tau_1]$  u kome je  $u^0=K$  i interval  $[\tau_n, t_k]$  u kome je  $u^0 = K \cdot \text{sign} \lambda_2(t_k)$ . U trenucima  $\tau_1$  i  $\tau_n$  optimalno upravljanje skokovito menja vrednost.

U zavisnosti od međusobnih odnosa puta koji kabina treba da pređe –  $h$ , maksimalne dozvoljene brzine –  $V^*$  i maksimalno dozvoljenog ubrzanja (upravljanja) –  $K$  postoje dva moguća slučaja – režima kretanja kabine lifta.

**I SLUČAJ:** Neka je za sve vreme kretanja  $v \leq V^*$ , gde znak jednakosti može da važi samo u trenutku a ne na konačnom intervalu. Tada su funkcije  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  glatke i neprekidne na celom intervalu  $[t_0, t_k]$ , a optimalno upravljanje ima oblik:



Slika 6. Režimi kretanja kabine teretnog lifta (I slučaj)

$$u^0 = K \cdot \text{sign} \lambda_2. \quad (38)$$

Trenutci u kojima optimalno upravljanje skokovito menja vrednost dobijaju se iz uslova  $\lambda_2(t)=0$  odnosno:

$$-L_1 \cdot t + L_2 = 0, \quad L_2 = \frac{1}{K}.$$

Da bi postojalo realno pozitivno rešenje za  $\tau_1$  (slika 6a) potrebno je da bude ispunjen sledeći uslov:

$$L_1 > 0.$$

Vrednost konstante  $L_1$  nije potrebno određivati. Na osnovu gore iznetog optimalno upravljanje ima sledeći oblik: (slika 6b)

$$u^0 = \begin{cases} K & t_0 \leq t \leq \tau_1 \\ -K & \tau_1 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (39)$$

Na prvom intervalu  $[t_0 \leq t \leq \tau_1]$  optimalno upravljanje ima vrednost  $u^0 = K$ , a promena parametara  $v$  i  $y$  (40) u vremenu se dobija rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina (26) za datu vrednost  $u^0$ .

$$\begin{aligned} v &= K \cdot t + A_1 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 + A_1 \cdot t + A_2 \end{aligned} \quad (40)$$

Zamenom početnih uslova (28a) u (40) dobija se da su konstante  $A_1=0$  i  $A_2=0$  tako da izrazi za brzinu (slika 6c) i pređeni put na intervalu  $[t_0 \leq t \leq \tau_1]$  imaju sledeći oblik:

$$v = K \cdot t, \quad y = \frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 \quad (41)$$

Na drugom intervalu  $[\tau_1 \leq t \leq t_k]$  optimalno upravljanje ima vrednost  $u^0 = -K$ , a promena parametara  $v$  i  $y$  (42) u vremenu se dobija rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina (26) za datu vrednost optimalnog upravljanja.

$$\begin{aligned} v &= -K \cdot t + B_1 \\ y &= -\frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 + B_1 \cdot t + B_2 \end{aligned} \quad (42)$$

U tački  $\tau_1$  moraju da važe uslovi neprekidnosti tj.:

$$\begin{aligned} v(\tau_1^-) &= v(\tau_1^+) = K \cdot \tau_1 \\ y(\tau_1^-) &= y(\tau_1^+) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \tau_1^2 \end{aligned} \quad (43)$$

Zamenom uslova (43) kao početnih uslova u (42) i rešavanjem dobijaju se vrednosti za konstante  $B_1$  i  $B_2$ :

$$B_1 = 2 \cdot K \cdot \tau_1, \quad B_2 = -K \cdot \tau_1^2.$$

Zamenom krajnjih uslova (28b) i konstanti  $B_1$  i  $B_2$  u (42) dobija se sistem algebarskih jednačina iz koga se određuju vrednosti za  $\tau_1$  i  $t_k$ .

$$\begin{aligned} -K \cdot t_k + 2 \cdot K \cdot \tau_1 &= 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot K \cdot t_k^2 + 2 \cdot K \cdot \tau_1 \cdot t_k - K \cdot \tau_1^2 &= dh \end{aligned} \quad (44)$$

Rešenja sistema (44) su:

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{dh}{K}}, \quad t_k = 2 \cdot \sqrt{\frac{dh}{K}}. \quad (45)$$

Izrazi za brzinu (slika 6c) i pređeni put na intervalu  $[\tau_1 \leq t \leq t_k]$  imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} v &= -K \cdot t + 2 \cdot \sqrt{K \cdot dh} \\ y &= -\frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 + 2 \cdot \sqrt{K \cdot dh} \cdot t - dh \end{aligned} \quad (46)$$

Optimalno upravljanje (39) ima smisla samo ako je:

$$v \leq V^* \Rightarrow dh \leq \frac{V^{*2}}{K}. \quad (47)$$

**II SLUČAJ:** Slučaj kada promenljive stanja na konačnim intervalima uzimaju vrednosti sa granice oblasti na kojoj je definisano kretanje sistema, princip maksimuma treba dopuniti dodatnim uslovima. Neka je jedna od granica:

$$g(y, v) = 0 \quad (48)$$

i neka su:  $\tau'$  - trenutak kada sistem dospeva na granicu (48), a  $\tau''$  - trenutak kada je napušta, tj.

$$g(y, v) < 0 \quad t < \tau'; \quad g(y, v) = 0 \quad \tau' \leq t \leq \tau''; \quad g(y, v) < 0 \quad t > \tau''. \quad (49)$$

Tada funkcije  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  nisu više neprekidne na celom intervalu, pa se principu maksimuma dodaju uslovi skoka:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau'^-) - \lambda_1(\tau'^+) &= \mu \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{\tau'}, & \lambda_1(\tau''-) - \lambda_1(\tau''+) &= 0, \\ \lambda_2(\tau'^-) - \lambda_2(\tau'^+) &= \mu \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right)_{\tau'}, & \lambda_2(\tau''-) - \lambda_2(\tau''+) &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

gde je  $\mu$  konstantna veličina manja od nule tj.  $\mu = \text{const.} \wedge \mu < 0$ .



Pored gornjeg uslova potrebno je dodati i uslov neprekidnosti upravljanja:

$$(H^0)_{\tau'^-} = (H^0)_{\tau'^+} \quad (H^0)_{\tau''^-} = (H^0)_{\tau''^+}, \quad (51)$$

kao i uslov:

$$\frac{dg}{dt} = 0, \quad \tau' \leq t \leq \tau''. \quad (52)$$

Kao što je napred rečeno, u toku kretanja postoje konačni intervali na kojima je  $v=V^*$ , odnosno u skladu sa (48):

$$g(y, v) = v - V^* = 0. \quad (53)$$

Kako je u prethodnom slučaju pokazano da postoji početni interval  $[t_0 \leq t \leq \tau_1]$  na kome je  $u^0=K$ , pretpostavimo da u trenutku  $\tau_1$  brzina dostiže maksimalnu vrednost koju zadržava do nekog trenutka  $\tau_2$ , tada je:

$$g(y, v) = v - V^* = 0, \quad \frac{dg}{dt} = u = 0, \quad [\tau_1 \leq t \leq \tau_2]. \quad (54)$$

Kako su:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = 1, \quad [\tau_1 \leq t \leq \tau_2] \quad (55)$$

uslovi (50), uzimajući u obzir (33), imaju oblik:

$$\begin{aligned} \tau_1 : \quad L_1 - L_1' &= 0, \quad -L_1 \cdot \tau_1 + L_2 + L_1' \cdot \tau_1 - L_2' = \mu \\ \tau_2 : \quad L_1' - L_1'' &= 0, \quad -L_1' \cdot \tau_2 + L_2' + L_1'' \cdot \tau_2 - L_2'' = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

odakle su:

$$L_1'' = L_1' = L_1, \quad L_2'' = L_2' = L_2 - \mu. \quad (57)$$

Prema gore iznetom zaključuje se da funkcija  $\lambda_2$  samo ima skok u tački  $\tau_1$ , tj.

$$\lambda_2 = -L_1 \cdot t + L_2, \quad t \geq \tau_1. \quad (58)$$

Uslovi (51) o neprekidnosti upravljanja se svode na:

$$\lambda_2(\tau_1^-) \cdot K = \lambda_2(\tau_1^+) \cdot 0, \quad \lambda_2(\tau_2^-) \cdot 0 = \lambda_2(\tau_2^+) \cdot u(\tau_2^+), \quad (59)$$

odnosno:

$$\lambda_2(\tau_1^-) = 0 \Rightarrow -L_1 \cdot \tau_1 + L_2 = 0, \quad \lambda_2(\tau_2^+) = 0 \Rightarrow -L_1 \cdot \tau_1 + L_2' = 0. \quad (60)$$

Gornji izrazi pokazuju da na intervalu  $[\tau_1 \leq t \leq \tau_2]$  vrednost optimalnog upravljanja je jednaka nuli.

S obzirom da su:

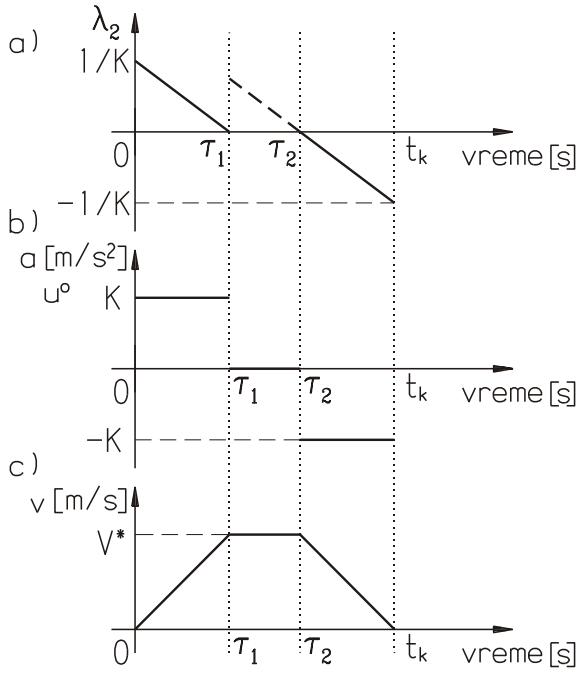
$$L_1'' = L_1' = L_1 > 0, \quad L_2'' = L_2' > L_2 = \frac{1}{K}.$$

funkcija  $\lambda_2$  na intervalu  $[\tau_2 \leq t]$  je negativna tj.

$$\lambda_2(t) < 0, \quad [\tau_2 \leq t]$$

što odgovara napred iznetom tvrđenju da funkcija  $\lambda_2$  a samim tim i optimalno upravljanje  $u^0$  jednom u toku kretanja menjaju znak i da na tom intervalu postoji trenutak  $t_k$  u kome su ispunjeni krajnji uslovi (28b) stanja sistema. Prema tome optimalno upravljanje ima sledeći oblik: (slika 7a)

$$u^0 = \begin{cases} K & t_0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -K & \tau_2 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (61)$$



Slika 7. Režimi kretanja kabine teretnog lifta (II slučaj)

Na prvom intervalu  $[t_0 \leq t \leq \tau_1]$  optimalno upravljanje ima vrednost  $u^0 = K$ , a promena parametara  $v$  i  $y$  (62) u vremenu se dobija rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina (26) za datu vrednost  $u^0$ .

$$\begin{aligned} v &= K \cdot t + A_1 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 + A_1 \cdot t + A_2 \end{aligned} \quad (62)$$

Zamenom početnih uslova (28a) u (62) dobija se da su konstante  $A_1=0$  i  $A_2=0$  tako da izrazi za brzinu (slika 7c) i pređeni put na intervalu  $[t_0 \leq t \leq \tau_1]$  imaju sledeći oblik:

$$v = K \cdot t, \quad y = \frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 \quad (63)$$

Na drugom intervalu  $[\tau_1 \leq t \leq \tau_2]$  optimalno upravljanje ima vrednost  $u^0=0$ , a promena parametara  $v$  i  $y$  (64) u vremenu se dobija rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina (26) za datu vrednost optimalnog upravljanja.

$$\begin{aligned} v &= V^* \\ y &= V^* \cdot t + B_1 \end{aligned} \quad (64)$$

U tački  $\tau_1$  moraju da važe uslovi neprekidnosti tj.:

$$\begin{aligned} v(\tau_1^-) &= v(\tau_1^+) = K \cdot \tau_1 \\ y(\tau_1^-) &= y(\tau_1^+) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \tau_1^2 \end{aligned} \quad (65)$$

Zamenom uslova (65) kao početnih uslova u (64) i rešavanjem dobijaju se vrednosti za konstantu  $B_1$  kao i za vremenski trenutak  $\tau_1$ :

$$\tau_1 = \frac{V^*}{K}, \quad B_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V^{*2}}{K}. \quad (66)$$

Zamenom vrednosti za konstantu  $B_1$  u (64) dobija se da izrazi za brzinu (slika 7c) i pređeni put na intervalu  $[\tau_1 \leq t \leq \tau_2]$  imaju sledeći oblik:

$$v = V^*, \quad y = V^* \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{V^{*2}}{K} \quad (67)$$

Na trećem intervalu  $[\tau_2 \leq t \leq t_k]$  optimalno upravljanje ima vrednost  $u^0 = -K$ , a promena parametara  $v$  i  $y$  (68) u vremenu se dobija rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina (26) za datu vrednost optimalnog upravljanja.

$$\begin{aligned} v &= -K \cdot t + C_1 \\ y &= -\frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2 \end{aligned} \quad (68)$$

U tački  $\tau_2$  moraju da važe uslovi neprekidnosti tj.:

$$\begin{aligned} v(\tau_2^-) &= v(\tau_2^+) = V^* \\ y(\tau_2^-) &= y(\tau_2^+) = V^* \cdot \tau_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{V^{*2}}{K} \end{aligned} \quad (69)$$

Zamenom uslova (69) kao početnih uslova u (68) i rešavanjem dobijaju se vrednosti za konstante  $C_1$  i  $C_2$ :

$$C_1 = V^* + K \cdot \tau_2, \quad C_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{V^{*2}}{K} - \frac{1}{2} \cdot K \cdot \tau_2^2.$$

Zamenom krajnjih uslova (28b) i konstanti  $C_1$  i  $C_2$  u (68) dobija se sistem algebarskih jednačina iz koga se određuju vrednosti za  $\tau_2$  i  $t_k$ .

$$\begin{aligned} -K \cdot t_k + V^* + K \cdot \tau_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot K \cdot t_k^2 + (V^* + K \cdot \tau_2) \cdot t_k - \frac{1}{2} \cdot \frac{V^{*2}}{K} - \frac{1}{2} \cdot K \cdot \tau_2^2 &= dh \end{aligned} \quad (70)$$

Rešenja sistema (70) su:

$$\tau_2 = \frac{dh}{V^*}, \quad t_k = \frac{dh}{V^*} + \frac{V^*}{K}. \quad (71)$$

Izrazi za brzinu (slika 7c) i pređeni put na intervalu  $[\tau_2 \leq t \leq t_k]$  imaju sledeći oblik:

$$v = -V^* + K \cdot \frac{dh}{V^*} - K \cdot t \quad (72)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot t^2 + (V^* + K \cdot \frac{dh}{V^*}) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{V^{*2}}{K} - \frac{1}{2} \cdot K \cdot \frac{dh^2}{V^{*2}}$$

Optimalno upravljanje (61) ima smisla samo ako je:

$$\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow dh > \frac{V^{*2}}{K}. \quad (73)$$

Na osnovu svega gore iznetog zaključuje se da optimalno vreme kretanja kabine lifta ( $t_k$ ) u y pravcu zavisi od puta koji kabina treba da pređe ( $dh$ ), maksimalne dozvoljene brzine ( $V^*$ ) i ubrzanja ( $K$ ) tj.

$$t_k = \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{\frac{dh}{K}}, & dh \leq \frac{V^{*2}}{K} \\ \frac{dh}{V^*} + \frac{V^*}{K}, & dh > \frac{V^{*2}}{K} \end{cases} \quad (74)$$

### Optimizacija kretanja kabine putničkog lifta - I faza optimizacije

U slučaju putničkog lifta, a naročito u slučaju npr. bolničkih liftova, potrebno je voditi računa o komforu transporta liftom jer se istim transportuje veliki broj ljudi različite starosne dobi i zdravstvenog stanja. Tako da velike vrednosti brzine, ubrzanja i trzaja (izvoda ubrzanja po vremenu) mogu negativno a utiču na stanje i zdravlje putnika. Drugim rečima u ovom slučaju je potrebno da pokretanja i zaustavljanja kabine lifta budu što je moguće više bez trzanja, što vodi ka sofisticiranijim i skupljim upravljačkim sistemima (upravljanje npr. trzajem itd.). [4]

Zadatak određivanja optimalnog kretanja kabine putničkog lifta rešavaće se primenom principa maksimuma. Diferencijalne jednačine koje opisuju kretanje kabine lifta (slika 5) mogu se u ovom slučaju napisati u sledećem obliku:

$$\dot{y} = v, \quad \dot{v} = a, \quad \dot{a} = j \quad (75)$$

Za upravljačku veličinu biće uzet trzaj ( $j$ ) ograničen po apsolutnoj vrednosti, ubrzanje će takođe biti ograničeno po apsolutnoj vrednosti, dok će brzina moći da uzima vrednosti od nule do neke unapred zadate pozitivne vrednosti tj.:

$$u = j, \quad |u| \leq M, \quad |a| \leq K, \quad 0 \leq v \leq V^* \quad (76)$$

Problem se sastoji u određivanju takvog upravljanja  $u^0$  za koje će sistem u toku kretanja u jednom smeru iz početnog stanja:

$$t = t_0, y(t_0) = 0, v(t_0) = 0, a(t_0) = 0, \quad (77a)$$

doći u stanje:

$$t = t_k, y(t_k) = dh, v(t_k) = 0, a(t_k) = 0, \quad (77b)$$

za najkraće (optimalno) vreme  $t_k$ . Veličina  $dh$  predstavlja, zadatu visinu (put u y pravcu) koju treba ostvariti.

Jedinstveno upravljanje je određeno zahtevom:

$$t_k \rightarrow \inf_u \Rightarrow \int_{t_0}^{t_k} dt \rightarrow \inf_u \quad (78)$$

Problem definisan relacijama (75) - (78) sveden je na oblik koji omogućuje direktnu primenu principa maksimuma. Saglasno izrazima (75) i (78) formira se funkcija oblika:

$$H = -1 + \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot a + \lambda_3 \cdot u \quad (79)$$

gde veličine  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$  zadovoljavaju sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v}, \quad \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial a} \quad \text{ili} \\ \dot{\lambda}_1 &= 0, \quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 \end{aligned} \quad (80)$$

Prema teoremi principa maksimuma funkcija  $H$  na optimalnom rešenju ima maksimalnu vrednost tj.

$$\forall t \in [t_0, t_k] \quad H \leq \sup_u H = (H)_{u^0} = H_0 \rightarrow u^0 \quad (81)$$

Rešenja sistema diferencijalnih jednačina (80) su:

$$\lambda_1 = L_1, \quad \lambda_2 = -L_1 \cdot t + L_2, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot t - L_2 \cdot t + L_3, \quad (82)$$

gde su  $L_1, L_2$  i  $L_3$  konstante.

Uslov koji moraju da zadovolje veličine  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$ , je da neka od veličina  $\lambda_i$  ( $i=1,2,3$ ) u svakom trenutku mora biti veća od nule, tj.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t \in [t_0, t_k]. \quad (83)$$

Ako se optimalno rešenje  $u^0$  traži unutar oblasti dopustivih upravljanja, tj. u oblasti  $|u| \leq M$ , tada je za (81) potreban uslov:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

S obzirom na (79) i (80) iz gornjeg uslova sledi da je istovremeno:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ i } \lambda_3 = 0,$$

što je u suprotnosti sa uslovom (83) principa maksimuma. Prema tome optimalno upravljanje treba tražiti na granici ( $|u| = M$ ) dopustivih upravljanja. U tom slučaju, uslov (81) će biti ispunjen ako je

$u^0 = K \cdot \text{sign} \lambda_3$ . Izuzetak predstavlja ako je na konačnom intervalu  $v=V^*$  ili  $|a|=M$  kada je  $u^0=0$ .

U opštem slučaju struktura optimalnog upravljanja ima oblik:

$$u^0 = \begin{cases} K \cdot \text{sign} \lambda_3 & v < V^* \wedge |a| < M \\ 0 & v = V^* \vee |a| = M \end{cases} \quad (84)$$

Iz gore navedenog funkcija  $\lambda_3(t)$  igra ključnu ulogu u određivanju optimalnog upravljanja. Polazeći od činjenice da je  $j(0) > 0$  za ( $h > 0$ ) odnosno  $u^0(0) = M$ , s obzirom na (82) i (84), dobija se da je  $\lambda_3(0) = L_3 > 0$ , što sledi iz (81) za  $t_0 = 0$  tj.

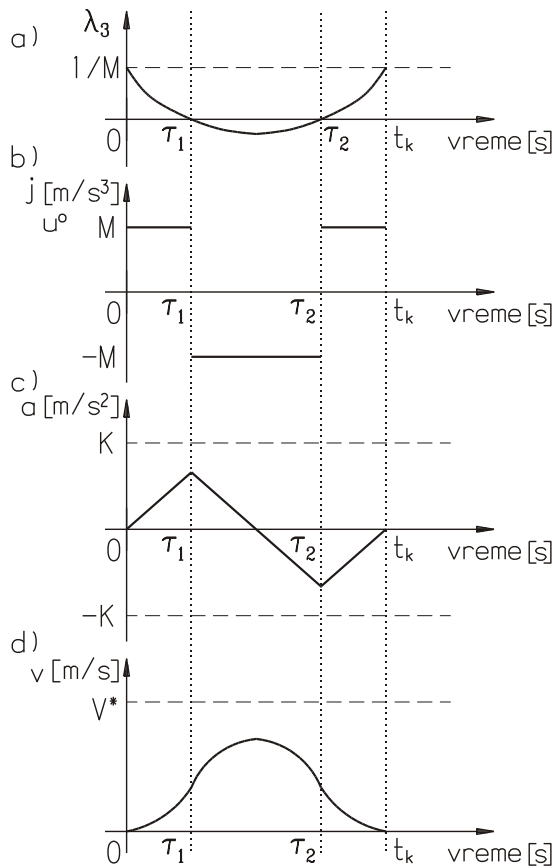
$$(H^0)_{t_0} = -1 + L_3 \cdot M = 0 \Rightarrow L_3 = \frac{1}{M}. \quad (85)$$

Pored toga uslov iz (81) u trenutku  $t_k$  se svodi na:

$$(H^0)_{t_k} = -1 + \lambda_3(t_k) \cdot u^0(t_k) = 0 \Rightarrow |\lambda_3(t_k)| = \frac{1}{M} \quad (86)$$

Pošto je  $\lambda_3(t)$  kvadratna funkcija i shodno ograničenjima (77a) i (77b), u opštem slučaju, uvek postoji početni interval  $[t_0, \tau_1]$  u kome je  $u^0=M$  i interval  $[\tau_n, t_k]$  u kome je  $u^0 = K \cdot \text{sign} \lambda_3(t_k)$ . U trenucima  $\tau_1$  i  $\tau_n$  optimalno upravljanje skokovito menja vrednost.

U zavisnosti od međusobnih odnosa puta koji kabina treba da pređe –  $h$ , maksimalne dozvoljene brzine –  $V^*$ , maksimalno dozvoljenog ubrzanja (upravljanja) –  $K$  i maksimalno dozvoljenog trzaja (upravljanja) –  $M$  postoje četiri moguća slučaja – režima kretanja kabine lifta. U narednom tekstu, zbog obimnosti postupka dobijanja analitičkih rešenja a i velike sličnosti sa postupkom dobijanja analitičkih rešenja u slučaju teretnog lifta, biće samo objašnjeno koji su to slučajevi i dijagramski prikazane promene odgovarajućih režima kretanja.



Slika 8. Režimi kretanja putničkog lifta (I slučaj)

**I SLUČAJ:** Neka je za sve vreme kretanja  $v \leq V^*$  i  $|a| \leq K$  gde znak jednakosti može da važi samo u trenutku a ne na konačnom intervalu. Tada su funkcije  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  glatke i neprekidne na celom intervalu  $[t_0, t_k]$ , a optimalno upravljanje ima oblik:

$$u^0 = M \cdot \text{sign} \lambda_3. \quad (87)$$

Trenutci u kojima optimalno upravljanje skokovito menja vrednost dobijaju se iz uslova  $\lambda_3(t)=0$  odnosno:

$$\frac{1}{2} L_1 \cdot t^2 + L_2 \cdot t + L_3 = 0, \quad L_3 = \frac{1}{M}.$$

Da bi postojala realna i pozitivna rešenja za  $\tau_1$  i  $\tau_2$  (slika 8a) potrebno je da bude ispunjen sledeći uslov:

$$L_1 > 0, L_2 > 0, L_2^2 - \frac{2 \cdot L_1}{M} > 0.$$

Vrednosti konstanti  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$  nije potrebno određivati. Na osnovu gore iznetog optimalno upravljanje ima sledeći oblik: (slika 8b)

$$u^0 = \begin{cases} M, & t_0 \leq t \leq \tau_1 \\ -M, & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ M, & \tau_2 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (88)$$

**II SLUČAJ:** Kada promenljive stanja na konačnim intervalima uzimaju vrednosti sa granice oblasti na kojoj je definisano kretanje sistema, princip maksimuma treba dopuniti dodatnim uslovima. Neka je jedna od granica:

$$g(y, v, a) = 0 \quad (89)$$

i neka su:  $\tau'$  - trenutak kada sistem dospeva na granicu (89), a  $\tau''$  - trenutak kada je napušta, tj.

$$g(y, v, a) < 0 \quad t < \tau'; \quad g(y, v, a) = 0 \quad \tau' \leq t \leq \tau''; \quad g(y, v, a) < 0 \quad t > \tau''. \quad (90)$$

Tada funkcije  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  nisu više neprekidne na celom intervalu, pa se principu maksimuma dodaju uslovi skoka:

$$\begin{aligned}\lambda_1(\tau'^-) - \lambda_1(\tau'^+) &= \mu \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{\tau'}, & \lambda_1(\tau''-) - \lambda_1(\tau''+) &= 0, \\ \lambda_2(\tau'^-) - \lambda_2(\tau'^+) &= \mu \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right)_{\tau'}, & \lambda_2(\tau''-) - \lambda_2(\tau''+) &= 0, \\ \lambda_3(\tau'^-) - \lambda_3(\tau'^+) &= \mu \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial a} \right)_{\tau'}, & \lambda_3(\tau''-) - \lambda_3(\tau''+) &= 0,\end{aligned}\tag{91}$$

gde je  $\mu$  konstantna veličina manja od nule tj.  $\mu = \text{const.} \wedge \mu < 0$ .

Pored gornjeg uslova potrebno je dodati i uslov neprekidnosti upravljanja:

$$(H^0)_{\tau'^-} = (H^0)_{\tau'^+} \quad (H^0)_{\tau''-} = (H^0)_{\tau''+},\tag{92}$$

kao i uslov:

$$\frac{dg}{dt} = 0, \quad \frac{d^2g}{dt^2} = 0, \quad \tau' \leq t \leq \tau''.\tag{93}$$

Kao što je napred rečeno, u toku kretanja postoje konačni intervali na kojima je  $|a| = K$ , odnosno u skladu sa (89):

$$g_1(y, v, a) = a - K = 0, \quad g_2(y, v, a) = -a - K = 0.\tag{94}$$

Kako je u prethodnom slučaju pokazano da postoji početni interval  $[t_0 \leq t \leq \tau_1]$  na kome je  $u^0 = K$ , pretpostavimo da u trenutku  $\tau_1$  ubrzanje dostiže maksimalnu vrednost koju zadržava do nekog trenutka  $\tau_2$ , tada je:

$$g_1(y, v, a) = a - K = 0, \quad \frac{dg_1}{dt} = u = 0, \quad [\tau_1 \leq t \leq \tau_2].\tag{95}$$

Kako su:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial v} \equiv 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial a} = 1, \quad [\tau_1 \leq t \leq \tau_2]\tag{96}$$

uslovi (91), uzimajući u obzir (82), imaju oblik:

$$\begin{aligned}\tau_1 : L_1 - L_1' &= 0, \quad -L_1 \cdot \tau_1 + L_2 + L_1' \cdot \tau_1 - L_2' = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \tau_1^2 - L_2 \cdot \tau_1 + L_3 - \frac{1}{2} \cdot L_1' \cdot \tau_1^2 + L_2' \cdot \tau_1 - L_3' &= \mu_1 \\ \tau_2 : L_1' - L_1'' &= 0, \quad -L_1' \cdot \tau_2 + L_2' + L_1'' \cdot \tau_2 - L_2'' = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot L_1' \cdot \tau_2^2 - L_2' \cdot \tau_2 + L_3' - \frac{1}{2} \cdot L_1'' \cdot \tau_2^2 + L_2'' \cdot \tau_2 - L_3'' &= 0\end{aligned}\tag{97}$$

odakle su:

$$L_1'' = L_1' = L_1, \quad L_2'' = L_2' = L_2, \quad L_3'' = L_3' = L_3 - \mu_1.\tag{98}$$

Prema gore iznetom zaključuje se da samo funkcija  $\lambda_3$  ima skok u tački  $\tau_1$ , tj.

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot t^2 - L_2 \cdot t + L_3, \quad t \geq \tau_1.\tag{99}$$

Uslovi (92) o neprekidnosti upravljanja se svode na:

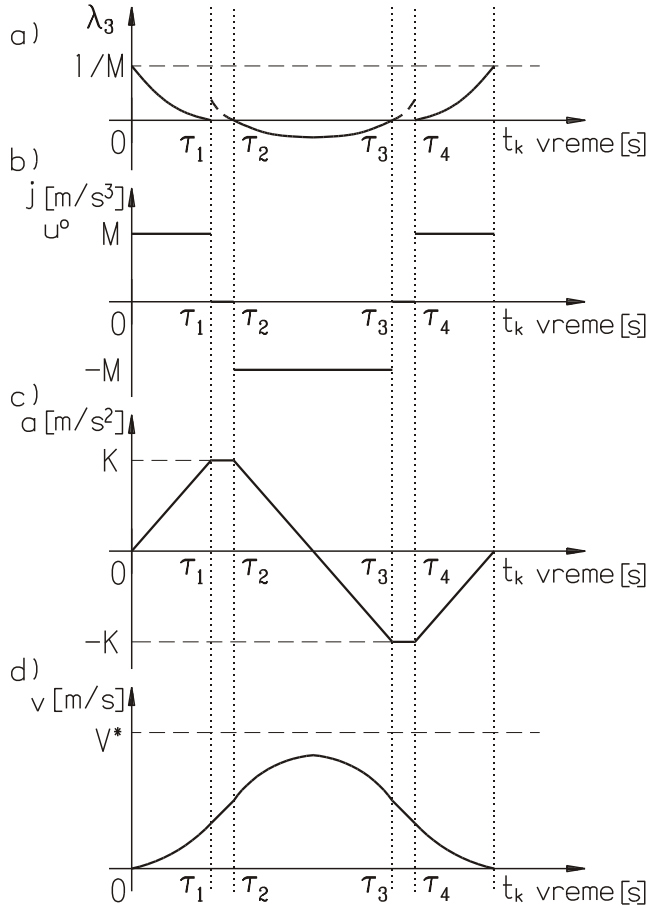
$$\lambda_3(\tau_1^-) \cdot M = \lambda_3(\tau_1^+) \cdot 0, \quad \lambda_3(\tau_2^-) \cdot 0 = \lambda_3(\tau_2^+) \cdot u(\tau_2^+),\tag{100}$$

odnosno:

$$\lambda_3(\tau_1^-) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \tau_1^2 + L_2 \cdot \tau_1 + L_3 = 0, \quad (101)$$

$$\lambda_3(\tau_2^+) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \tau_2^2 + L_2 \cdot \tau_2 + L_3 = 0$$

Gornji izrazi pokazuju da na intervalu  $[\tau_1 \leq t \leq \tau_2]$  vrednost optimalnog upravljanja je jednaka nuli. (slika 9a)



Slika 9. Režimi kretanja putničkog lifta (II slučaj)

S obzirom da su:

$$L_1'' = L_1' = L_1 > 0, \quad L_2'' = L_2' = L_2 > 0,$$

$$L_3'' = L_3' > L_3 = \frac{1}{M}$$

funkcija  $\lambda_3$  na intervalu  $[\tau_2 \leq t \leq \tau_3]$  je negativna tj. (slika 9a)

$$\lambda_3(t) < 0, \quad [\tau_2 \leq t \leq \tau_3] \quad (102)$$

gde je  $\tau_3$  trenutak u kome  $\lambda_3$  menja znak ili ima skok.

U skladu sa (102) optimalno upravljanje ima sledeću vrednost:

$$u^0 = -M, \quad [\tau_2 \leq t \leq \tau_3], \quad (103)$$

što odgovara činjenici da posle napuštanja maksimalnog ubrzanja,  $j < 0$ .

Neka je  $\tau_3$  trenutak u kome stanje sistema dospeva na granicu  $a = -K$  i zadržava se na njoj do nekog trenutka  $\tau_4$ , odnosno

$$g_2(y, v, a) = -a - K = 0,$$

$$\frac{dg_2}{dt} = u = 0, \quad [\tau_3 \leq t \leq \tau_4] \quad (104)$$

tada se iz uslova skoka (91) s obzirom na (98) dobija:

$$L_1''' = L_1'' = L_1' = L_1,$$

$$L_2''' = L_2'' = L_2' = L_2, \quad (105)$$

$$L_3''' = L_3'' = L_3' = L_3 - \mu_1 + \mu_2$$

gde je  $\mu_2 = \text{const.} \wedge \mu_2 < 0$ . Prema tome samo funkcija  $\lambda_3$  ima prekid u  $\tau_3$ , tj.

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot t^2 - L_2 \cdot t + L_3, \quad t \geq \tau_3. \quad (106)$$

Uslovi (91) o neprekidnosti upravljanja se svode na:

$$\lambda_3(\tau_3^-) \cdot (-M) = \lambda_3(\tau_3^+) \cdot 0, \quad \lambda_3(\tau_4^-) \cdot 0 = \lambda_3(\tau_4^+) \cdot u(\tau_4^+), \quad (107)$$

odnosno:

$$\lambda_3(\tau_3^-) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \tau_3^2 + L_2 \cdot \tau_3 + L_3 = 0, \quad (108)$$

$$\lambda_3(\tau_4^+) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \tau_4^2 + L_2 \cdot \tau_4 + L_3 = 0$$

Gornji izrazi pokazuju da na intervalu  $[\tau_3 \leq t \leq \tau_4]$  vrednost optimalnog upravljanja je jednaka nuli.

S obzirom da su:

$$L_1''' = L_1'' = L_1' = L_1 > 0, \quad L_2''' = L_2'' = L_2' = L_2 > 0, \quad L_3''' < L_3'' = L_3',$$

funkcija  $\lambda_3$  je za  $t > \tau_4$  pozitivna tj. (slika 9a)

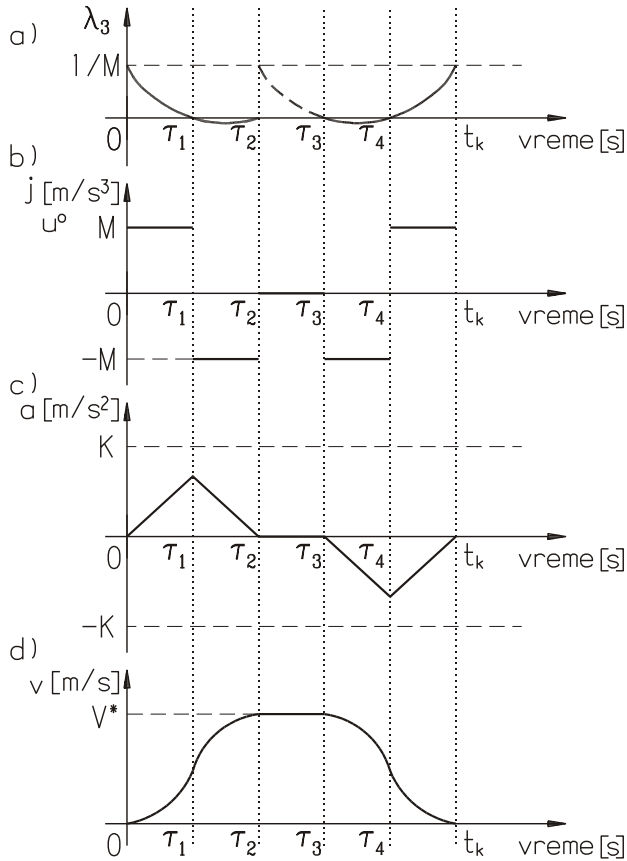
$$\lambda_3(t) > 0, \quad t > \tau_4 \quad (109)$$

na osnovu čega je:

$$u^0 = M, \quad t > \tau_4 \quad (110)$$

Pokazuje se da tek na tom delu postoji trenutak  $t_k > \tau_4$  u kome se završava kretanje, odnosno u kome su ispunjeni krajnji uslovi (77b) stanja sistema. Prema tome optimalno upravljanje ima sledeći oblik: (slika 9b)

$$u^0 = \begin{cases} M & t_0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -M & \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\ 0 & \tau_3 \leq t \leq \tau_4 \\ M & \tau_4 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (111)$$



Slika 10. Režimi kretanja putničkog lifta (III slučaj)

Na osnovu uslova (92) dobija se:

$$\lambda_3(\tau_1^-) = 0, \quad \lambda_3(\tau_4^+) = 0. \quad (115)$$

Pošto je  $a(\tau^-) = 0$ , sledi da na intervalu  $[t_0, \tau^-]$  optimalno upravljanje mora da menja znak, odnosno funkcija  $\lambda_3(t)$  mora da ima nule na tom intervalu. Iz jednačine: (slika 10a)

$$\frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot t^2 - L_2 \cdot t + L_3 = 0, \quad (116)$$

**III SLUČAJ:** Ako se pretpostavi da u toku kretanja postoji konačan interval  $[\tau', \tau'']$  na kome je  $v = V^*$  a ubrzanje može da dostiže svoj najveći intenzitet samo u pojedinim vremenskim trenucima. U tom slučaju je:

$$g(y, v, a) = v - V^* = 0,$$

$$\frac{dg}{dt} = a = 0, \quad (112)$$

$$\frac{d^2g}{dt^2} = u^0 = 0, \quad \tau' \leq t \leq \tau''$$

Zbog neprekidnosti promenljivih stanja sledi da je  $a(\tau^-) = 0$ . Uslovi na granicama intervala su:

$$\lambda_1(\tau'^-) = \lambda_1(\tau'^+), \quad \lambda_2(\tau'^-) \neq \lambda_2(\tau'^+),$$

$$\lambda_3(\tau'^-) \neq \lambda_3(\tau'^+),$$

$$\lambda_1(\tau''-) = \lambda_1(\tau''+), \quad \lambda_2(\tau''-) = \lambda_2(\tau''+),$$

$$\lambda_3(\tau''-) = \lambda_3(\tau''+),$$

$$(113)$$

odnosno:

$$L_1'' = L_1' = L_1, \quad L_2'' = L_2' \neq L_2, \quad (114)$$

$$L_3'' = L_3' \neq L_3$$

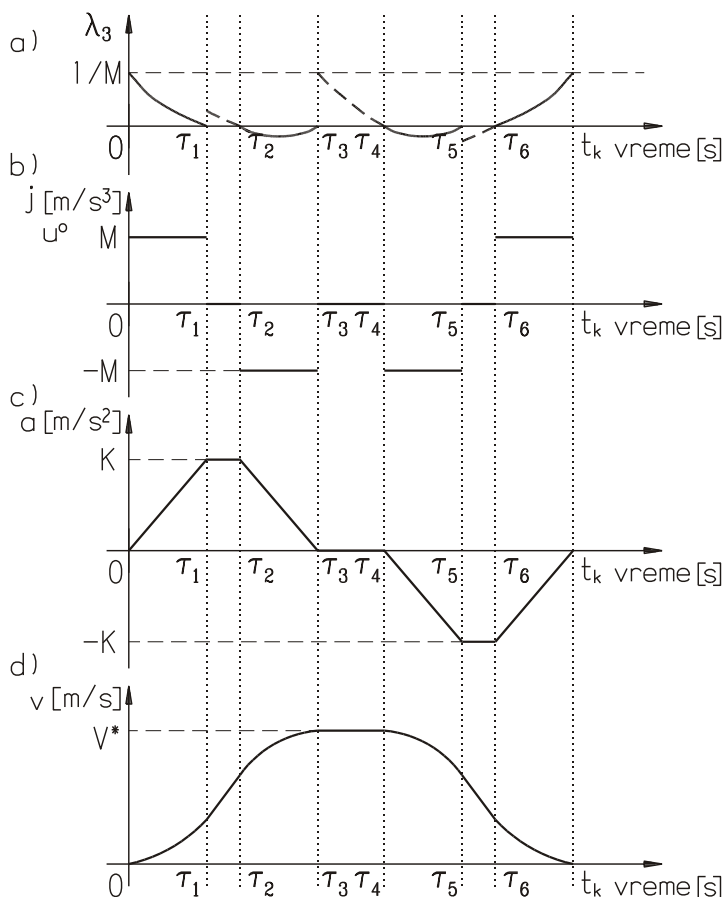


slede rešenja  $\tau_1$  i  $\tau_2$ , pri čemu je, s obzirom na (115),  $\tau'=\tau_2$ . Prema tome u trenutku  $\tau_1$  optimalno upravljanje menja vrednost sa  $M$  na  $-M$ . Posle silaska sa granice (112)  $t>\tau''$  optimalno upravljanje opet zavisi od znaka funkcije  $\lambda_3(t)$ . Iz jednačine: (slika 10a)

$$\frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot t^2 - L_2 \cdot t + L_3 = 0, \quad (117)$$

slede rešenja  $\tau_3$  i  $\tau_4$ , pri čemu je, s obzirom na (115),  $\tau''=\tau_3$ . Pošto je  $L_1>0$ , funkcija  $\lambda_3(t)$  ima negativan znak između  $\tau_3$  i  $\tau_4$  pa u trenutku  $\tau_4$  optimalno upravljanje menja vrednost sa  $-M$  na  $M$ . Posle toka pokazuje se da postoji trenutak  $t_k$  u kome se kretanje završava odnosno u kome su ispunjeni krajnji uslovi (77b) stanja sistema. Prema tome optimalno upravljanje ima sledeći oblik: (slika 10b)

$$u^o = \begin{cases} M & t_0 \leq t \leq \tau_1 \\ -M & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ 0 & \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\ -M & \tau_3 \leq t \leq \tau_4 \\ M & \tau_4 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (118)$$

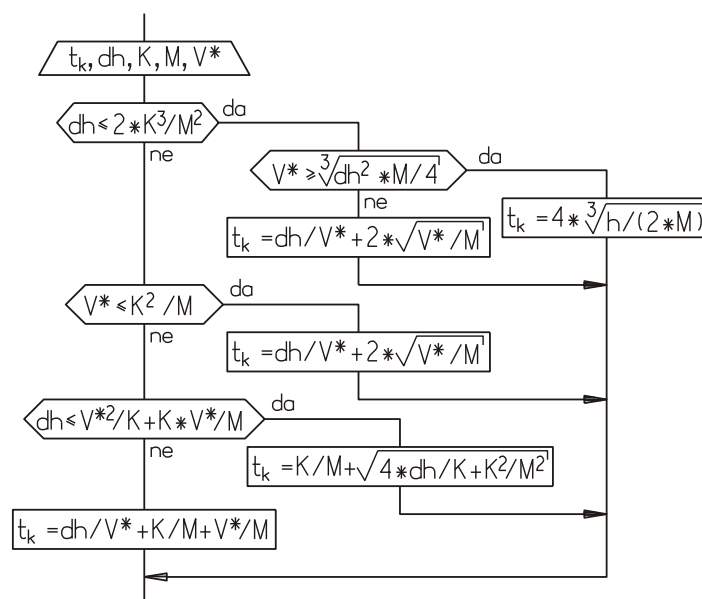


Slika 11. Režimi kretanja putničkog lifta (IV slučaj)

**IV SLUČAJ:** Neka u toku kretanja postoje konačni intervali na kojima je  $|a| = K$  i intervali na kojima je  $v=V^*$ . U razmatranju prethodnog slučaja kretanja (III slučaj) pokazuje se da, ako sistem dostigne maksimalnu brzinu na konačnom intervalu, ne može nikad da dostigne i maksimalno ubrzanje na konačnom intervalu, bez obzira na vrednost veličine  $h$ . U II slučaju kretanja, sistem dostiže granična ubrzanja na konačnim intervalima ali ne i maksimalnu brzinu na konačnom intervalu, dok je veličina  $h$  strogo ograničena. Na osnovu gore iznetog, rešavanje problema sa pretpostavkama ovog slučaja kretanja, nameće da se razmatra kretanje gde prvo sistem dolazi na granično ubrzanje pa zatim na maksimalnu brzinu. Promena vrednosti funkcija  $\lambda_3(t)$  prikazana je na slici 11a. Analogno postupcima u prethodnim slučajevima, optimalno upravljanje ima sledeći oblik: (slika 11b)

$$u^0 = \begin{cases} M & t_0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -M & \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\ 0 & \tau_3 \leq t \leq \tau_4 \\ -M & \tau_4 \leq t \leq \tau_5 \\ 0 & \tau_5 \leq t \leq \tau_6 \\ M & \tau_6 \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (119)$$

Na osnovu svega gore iznetog zaključuje se da optimalno vreme kretanja kabine putničkog lifta ( $t_k$ ) u y pravcu zavisi od međusobnih odnosa puta koji kabina treba da pređe ( $dh$ ), maksimalne dozvoljene brzine ( $V^*$ ), ubrzanja ( $K$ ) i trzaja ( $M$ ) na način kako je to prikazano na slici 12.



Slika 12. Optimalna vremena režima kretanja kabine putničkog lifta.

### Određivanje optimalnog pogonskog momenta za kretanje kabine lifta – II faza optimizacije

U zavisnosti od okruženja u kojem lift radi (teretni, putnički) bira se upravljački sistem odnosno način optimizacije kretanja kabine lifta. Prostom zamenom dobijenih rezultata optimizacije kretanja kabine lifta (prikazanih u prethodnom tekstu) u jednačinu (25) dobijaju se vrednosti pogonskog momenta ( $M_p$ ) potrebni da se ostvari dato optimalno kretanje.

Zbog postojanja različitog broja određivih stanica liftovskog postrojenja kao i različitog broja putnika u kabini, kad se govori o radnom ciklusu (kabine) lifta može se govoriti samo o tzv. srednjem ulaznom (izlaznom) ciklusu lifta.

Ulazni ciklus lifta obuhvata trajanje putovanja od trenutka kada se otvore vrata kabine na glavnoj ulaznoj stanici do njihovog ponovnog otvaranja na istoj stanici pri povratku kabine posle realizovanog prevoza putnika koji su bili u njoj.

Za vreme jednog ulaznog ciklusa lifta, u smeru gore - prevoz putnika i smeru dole - povratak prazne kabine, obavi se niz aktivnosti i to:

- ulazak putnika u kabinu,
- zatvaranje vrata,
- polazak lifta,

- optimalno kretanje kabine lifta (videti prethodni tekst),
- zaustavljanje lifta na odredišnoj stanici,
- otvaranje vrata,
- izlazak putnika kojima je ta stanica odredišna,
- ponavljanje prethodnih aktivnosti, onoliko puta koliko ima izlaznih stanica tj. dok ne izađu svi putnici iz kabine (ovim je završeno kretanje lifta u smeru gore i počinje kretanje u smeru dole bez usputnih stajanja),
- zatvaranje vrata,
- polazak lifta,
- optimalno kretanje kabine lifta (videti prethodni tekst),
- zaustavljanje lifta na polaznoj stanici,
- otvaranje vrata.

Radi dobijanja ukupnog vremena trajanja radnog ciklusa lifta na vremena optimalnog kretanja kabine lifta između dva zaustavljanja potrebno je dodati vremena otvaranja/zatvaranja vrata, ulaska/izlaska putnika sigurnosna vremena (foto ćelije) pri polasku/zaustavljanju lifta.

Kako se radni ciklusi kabine lifta po pravilu međusobno razlikuju, jedino je moguće odrediti tzv. srednji radni ciklus kabine lifta primenom simulacije tj. simulirajući rad liftovskog postrojenja.

## 6. ZAKLJUČAK

Prikazana nova metoda pripada oblasti mašinstva odnosi se na problem određivanja optimalnog upravljanja kretanjem mehanizama transportnih uređaja tačnije jednopozicionih transportnih uređaja sa prekidnim načinom rada. Optimizacija rada mehanizama ovih transportnih uređaja se u najvećem broju slučajeva svodi na modeliranje i rešavanje dvotačkastog graničnog problema. Po pravilu ti problemi su nelinearne prirode što dovodi do problema pri njihovom rešavanju.

Osnovna ideja nove metode je ta da se izvrši dekompozicija mehaničkog sistema i da se sama optimizacija kretanja mehanizama – radnog ciklusa vrši u dve faze. Kretanje tereta okačenog o užu (prva faza optimizacije) i rad mehanizama transportnog uređaja (druga faza optimizacije) se analiziraju odvojeno. Jedina fizička veza između tereta i mehanizama transportnog uređaja je užu tj. sila u užetu.

Jedna od najvećih prednosti predložene metode je to što se u prvoj fazi optimizacije vrši samo optimizacija kretanja tereta (materijalna tačka – dvotačkasti granični problem) dok se u drugoj fazi određuju sile ili momenti koji to kretanje treba da ostvare, u zavisnosti od konstrukcije transportnog uređaja, kao direktan zadatak dinamike. Ovim pristupom se izbegava analiza i razmatranje celokupnog mehaničkog sistema (teret + mehanizmi uređaja) što daleko pojednostavljuje dobijanje optimalnog rešenja posebno za različita okruženja i uslove u kojima dati transportni uređaj treba da radi.

Još jedna od velikih prednosti nove metode je ta da se komplikovano rešavanje nelinearnih dvotačkastih graničnih problema primenom nove metode se svodi na rešavanje linearnih problema (prva faza) bez gubitka opštosti – nelinearnosti (direktan zadatak dinamike – druga faza).

U prikazu primene nove metode, ona je primenjena na dve karakteristične vrste transportnih uređaja – dizalice i liftove. Dalji rad, okviru projekta tehnološkog razvoja pod nazivom „*Inovativni pristup u primeni inteligentnih tehnoloških sistema za proizvodnju delova od lima zasnovan na ekološkim principima*” (evidencioni broj TR-35004), bi trebalo usmeriti na primenu nove metode na druge (nekonvencionalne) transportne uređaje kao i na optimizaciju kretanja tereta analiziranih transportnih uređaja koji bi radili pod drugačijim uslovima i drugim okruženjima.

## LITERATURA

- [1] Arhipov, N. N., Karpačev, P. S., Majzelc, M. M., Plevako, N. A.: Osnovy konstruirovaniq i rasčeta tipovyh mašin i apparatov legkoj promyšlennosti, Mašgiz, Moskva, SSSR, 1963.
- [2] Auering, J. W.: Simple Control Strategies for Grab Cranes to Avoid Swinging of the Load at the Destination, *Förden und haben*, Vol. 6, 1986. pp. 413-420. (in German)
- [3] Auering, J. W.: Work Speed Selection of Ship Unloading Grabbers, *Förden und haben*, Vol. 10, 1986. pp.713-719. (in German)
- [4] Bugarić, U., Modeliranje nestacionarnog režima rada sistema mehanizovanog transporta primenom teorije redova, doktorska disertacija, Mašinski fakultet Beograd, Beograd, 2002.
- [5] Bugarić, U., Vuković, J., Petrović, D., Jeli, Z., Petrović, Z.: Optimization of the unloading bridge working cycle, *Journal of Mechanical Engineering - Strojniški Vestnik*, University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering, Ljubljana, Vol. 55, No. 1, 2009. pp. 55-63.
- [6] Bolotnik, N. N., Chiong, N.: About optimal length of suspended load during the motion of systems based on pendulum, *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, Vol. 6., 1983. pp. 28-34. (in Russian)
- [7] Carbon, L.: Advanced Drive Technology for Cranes, *Bulk solids handling*, Vol. 6, 1986. pp. 761-767.
- [8] Chiong, N.: Optimal control of motion of the pendulum based system on the surface with friction, *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, Vol. 1, 1984. pp. 67-72. (in Russian)
- [9] Hyde, J. M., Seering, W. P.: Using Input Command Pre-Shaping to Suppress Multiple Mode Vibration, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, 1991. pp. 2604-2609.
- [10] Jones, J. F., Petterson, B. J.: Oscillation Damped Movement of Suspended Objects, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Philadelphia, Pennsylvania, 1988. pp. 956-962.
- [11] Karihaloo, B. L., Parbery, R. D.: Optimal Control of a Dynamical System Representing a Gantry Crane, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, Vol. 36, 1982. pp. 409-417.
- [12] Kazak S. A.: *Dynamics of Bridge Cranes*, *Masinstroenie*, Moscow, 1968. p. 331. (in Russian)
- [13] Kazak, S. A.: Pendulum oscillations of load and influence of the driving mechanism to the trolley motion, *Vestnik Masinstroenia*, Vol. 8, 1991. pp. 30-32. (in Russian)
- [14] Komarov, M. S.: *Dynamics of transportation machines*, Masgiz, Moscow, 1962. p. 238. (in Russian)
- [15] Kress, R. L., Jansen, J. F., Noakes M. W.: Experimental Implementation of a Robust Damped-Oscillation Control Algorithm on a Full-sized, Two-Degree-Of-Freedom, AC Induction Motor-Driven Crane, *Proc. Fifth International Symposium on Robotics and Manufacturing*, Vol. 5, Maui, Hawaii, 1994. pp. 585-592.
- [16] Lobov, N. A.: *Dynamics of cranes*, *Masinstroenie*, Moscow, 1987. p. 157. (in Russian)
- [17] Moustafa, K. A. F., Ebeid, A. M.: Nonlinear Modeling and Control of Overhead Crane Load Sway, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, 1988. pp. 266-271.
- [18] Noakes, M. W., Jansen, J. F.: Generalized Inputs for Damped-Vibration Control of suspended payloads, *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 10, 1992. pp. 199-205.
- [19] Noakes, M. W., Kress, R. L., Appleton, G. T.: Implementation of Damped-Oscillation Crane Control for Existing ac Induction Motor-Driven Cranes, *Proc. Annual Meeting of the American Nuclear Society*, 1993. pp. 479-485.
- [20] Noakes, M. W., Petterson, B. J., Werner, J. C.: An Application of Oscillation Damped Motion for Suspended Payloads to the Advanced Integrated Maintenance Systems, *Proc. Annual Meeting of the American Nuclear Society*, Nashville, Tennessee, 1990. pp. 63-67.

- [21] Oyler, F. J.: Handling of Bulk Solids at Ocean Ports, Stacking Blending Reclaiming - Edited by R. H. Wohlbiel, Trans Tech Publications Clausthal, Germany, 1977.
- [22] Sage, A. P., White, C. C.: *Optimum System Control*, Prentice-Hall, Eaglewood, 1977. p. 63.
- [23] Schwarztmann, K.: Swing Absorber for Unloading Equipment for Bulk Goods, *Förden und haben*, Vol. 2, 1976. pp. 120-122. (in German)
- [24] Singer, C. N., Seering, W. P.: Design and Comparison of Command Shaping Methods for Controlling Residual Vibration, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Scottsdale, Arizona, 1989. pp. 922-927.
- [25] Singer, C. N., Seering, W. P.: Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, 1990. pp. 76-82.
- [26] Singer, C. N., Seering, W. P.: An Extension of Command Shaping Methods for Controlling Residual Vibration Using Frequency Sampling, *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, 1992. pp. 800-806.
- [27] Sokolov, B., N.: Synthesis of optimal control of pendulum energy, *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, Vol. 2, 1985. pp. 54-61. (in Russian)
- [28] Unbehauen, H., Metha, A., Pura, R.: On-line determination of the angle of swing angular velocity of a grab crane, *Förden und haben*, Vol. 6, 1987. pp. 399-403. (in German)
- [29] Vuković, J., Bugarić, U., Glišić, D., Petrović, D.: Optimization of the working cycle of harbour cranes, *Journal of theoretical and applied mechanics*, Vol. 45, No. 1, Warsaw 2007, pp. 147-159.
- [30] Zaremba, A. T.: Optimal pendulum motion during the phases limit of the point's suspension velocity, *Izvestiya Akademii Nauk USSR - Mekhanika Tverdogo Tela*, , Vol. 3, 1982. pp. 28-34. (in Russian)
- [31] Zrnić, Dj., Bugarić, U., Vuković, J.: The optimisation of moving cycle of grab by unloading bridges, *Proc. IFToMM 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Milano, Vol. 2, 1995. pp. 1001-1005.
- [32] [http://ec.europa.eu/research/fp7/index\\_en.cfm?pg=nano](http://ec.europa.eu/research/fp7/index_en.cfm?pg=nano)

Одлуком Истраживачко-стручног већа Машинског факултета у Београду бр. 2403/2 од 14.12.2012. године именовани смо за рецензенте нове методе под називом „Нови приступ оптимизацији кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада” чији су аутори: проф. др Угљеша Бугарић, проф. у пензији др Јосиф Вуковић, Душан Глишић, дипл. инж. маш., проф. др Душан Петровић, проф. др Зоран Миљковић. На основу предлога и након анализе методе подносимо следећи:

## ИЗВЕШТАЈ

Нова метода (M85) под називом „Нови приступ оптимизацији кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада” представљена је на 28 страница А4 формата, коришћењем Times New Roman фонта величине 12 pt, једноструког проредка. Опис методе садржи 119 једначина и 12 слика резултата примене нове методе представљених у следећих шест тематских целина, уз списак коришћене литературе:

1. Област на коју се техничко решење односи,
2. Технички проблем,
3. Постојећи приступи оптимизацији радног циклуса,
4. Суштина техничког решења,
5. Приказ резултата примене,
6. Закључак.

Нова метода припада области машинства и директно је усмерена на један од најосетљивијих модула укупног процеса пројектовања - модел оптимизације рада (избора) система и средстава, у овом случају транспортних средстава за извршавање функције кретања и транспорта - транспортних система у индустријским односно производним системима.

У другом поглављу образложен је технички проблем и дате су теоријске основе – дефиниције радног циклуса, технолошког и кинематског циклуса машине уопште. За једнопозиционе транспортне машине са прекидним начином рада (које су предмет нове методе) приказан је утицај трајања радног циклуса, као основне карактеристике рада ове врсте машина, на избор и носивост као и број потребних машина за задати транспортни задатак.

У трећем поглављу наведени су постојећи приступи проблему оптимизације радног циклуса транспортних машина са разних аспеката као што су нпр. време трајања, задовољавање одређених режима кретања, оптимизација у односу на геометрију система и окружење у којем машина ради итд. На крају се констатује да је заједничка карактеристика свих приказаних начина оптимизације радних циклуса је та да се приликом оптимизације (оптимално управљања кретањем у највећем броју случајева решавано као двотачкасти гранични проблем) разматрао целокупан механички систем, који укључује сам терет који се транспортује као и механизме уређаја који то кретање остварују.

У четвртој поглављу приказана је суштина техничког решења – нове методе која се огледа у томе да се при оптимизацији кретања механизма – радног циклуса врши декомпозиција механичког система и да се сама оптимизација врши у две фазе. У првој фази се одређује оптимално кретање самог терета у зависности од постављених контурних услова, док се у другој фази одређују промене сила (момената) погонских механизма

потребних за остваривање оптималног кретања терета. За оптимизацију кретања терета (прва фаза) предлаже се принцип максимума (али се не искључују и друге одговарајуће методе оптимизације) као најпогоднији за ову врсту оптимизације, док друга фаза оптимизације представља тзв. директан задатак динамике. Наведене су такође и предности примене нове методе оптимизације како са практичне тако и са теоријске стране.

У петом поглављу детаљно је приказана примена нове методе оптимизације кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада као што су дизалица и лифт. На примеру оптимизације кретања механизма – радног циклуса дизалица приказана је једна од предности нове методе а то је да се једно исто оптимално кретање самог терета (прва фаза оптимизације) може искористити за добијање оптималних вредности погонских сила и момената (друга фаза оптимизације) више транспортних уређаја исте врсте (дизалица) уколико они могу да остваре захтевано кретање терета. Такође, на примеру оптимизације кретања механизма – радног циклуса лифта приказана је још једна предност нове методе а то је да се за исту транспортну машину (лифт), тј. исти динамички модел у другој фази оптимизације, погонски моменти могу одредити у зависности од различитих оптималних кретања терета – кабине лифта, условљених потребама и окружењем у којим лифт ради (теретни или путнички лифтови).


У оквиру закључка укратко је дата основна идеја нове методе и наглашене су предности њене примене. Такође предложене су и смернице за даљи рад на примени нове методе на друге транспортне уређаје и примени на анализирани транспортне уређаје у другачијим радним окружењима.

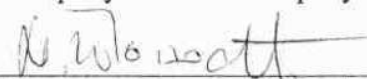
У складу са анализом предлога техничког решења, као именовани рецензенти дајемо следеће

## МИШЉЕЊЕ

Аутори нове методе (M85) под називом „**Нови приступ оптимизацији кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада**” су на јасан начин описали основне новог приступа оптимизацији кретања механизма – радних циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада. Резултати остварени применом ове нове методе указују на то да постоји очит допринос постојећем стању у области оптимизације радних циклуса транспортних машина применом савремене математичке теорије оптималног управљања на кретање сложених техничких објеката унутар којих постоји терет везан ужетом, тако што се веома компликовано решавање нелинеарних двотачкастих граничних проблема применом нове методе своди на решавање линеарних проблема без губитка општости – нелинеарности.

На основу увида у предлог нове методе и остварене резултате предлажемо Истраживачко-стручном већу Машинског факултета у Београду да се нова метода под називом „**Нови приступ оптимизацији кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада**” прихвати као ново техничко решење.

  
Проф. др Александар Обрадовић  
Универзитет у Београду-Машински факултет

  
Проф. др Милош Танасијевић  
Универзитет у Београду-Рударско геолошки факултет



Fabrika Metalnih Proizvoda

Београд, 18. 01. 2013. године

**Предмет:** Мишљење о реализацији пројекта „Иновативни приступ у примени интелигентних технолошких система за производњу делова од лима заснован на еколошким принципима“ (ТР-35004) у периоду 01.01.2012.-31.12.2012. (друга година финансирања)

Пројектом су обухваћена два основна циља истраживања: одређивање параметара производње делова од лима и управљање унутрашњим транспортом материјала са акцентом на примени еколошких принципа који подразумевају уштеду енергије, материјала и средстава за подмазивање.

Као резултат првог циља истраживања настала је нова методологија која обухвата аквизицију фрекционог сигнала микроскопијом сила трења и утврђивање одступања услед топографије инжењерске површине. Ова метода обезбеђује поступак за квалитативну и квантитативну карактеризацију инжењерске површине, а посебно се истичу два поступка којима се генеришу фрактална димензија као мера храпавости и дијаграм лагунарности као показатељ распореда удубљења и испупчења на обрађеној површини. Применом овог поступка омогућава се процена потребне запремине лубриканта, чиме се смањује употреба средства за подмазивање у индустрији металних производа.

Резултати остварени у другом истраживачком правцу, који су од важности за компанију ФМП д.о.о., су две нове методе. У првој методи је приказано решење проблема естимације (оцењивања) положаја мобилног робота за време извршавања транспортног задатка у оквиру система унутрашњег транспорта сировина, полуфабриката, материјала и готових делова, уз увођење повратних информација од камере. У оквиру друге методе приказан је управљачки систем мобилног робота који обухвата интеграцију интелигентног система базираног на емпиријски прикупљеним сензорским информацијама и машинском учењу демонстрацијом, и управљачког подсистема заснованог на елементима хомографске матрице добијене од камере.

Након увида у примењивост нових техничких решења, која су проистекла као резултати истраживања у оквиру пројекта, и на основу досадашње сарадње са реализаторима, компанија ФМП д.о.о. изражава задовољство спроведеним истраживањима и оствареним резултатима.



Генерални директор ФМП д.о.о.

Небојша Стојановић, дипл. маш. инж.



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
- МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ -  
БРОЈ: 2403/3  
ДАТУМ: 27.12.2012.

На основу захтева руководиоца пројекта проф.др Бојана Бабића бр. 2403/1 од 13.12.2012. године, одлуке о именовану рецензената и чл. 12.5 Статута Машинског факултета, Истраживачко стручно веће на седници од 27.12.2012. године, донело је следећу

### ОДЛУКУ

Прихвата се Техничко решење рађено у оквиру пројекта ТР 35004, под насловом: **„Нови приступ оптимизацији кретања механизма – радног циклуса једнопозиционих транспортних машина са прекидним начином рада ”**, чији су аутори: проф.др Угљеша Бугарић, др Јосиф Вуковић, ред.проф. у пензији, Душан Глишић, дипл.инж.маш., проф.др Душан Петровић и проф.др Зоран Миљковић, а позитивну рецензију поднели: проф.др Александар Обрадовић и проф.др Милош Танасијевић, Рударско геолошки факултет.

Одлуку доставити: Министарству просвете, науке и технолошког развоја РС, рецензентима и архиви Факултета ради евиденције.

ПРОДЕКАН  
ЗА НАУЧНОИСТРАЖИВАЧКУ ДЕЛАТНОСТ

  
Проф.др Војкан Лучанин

