

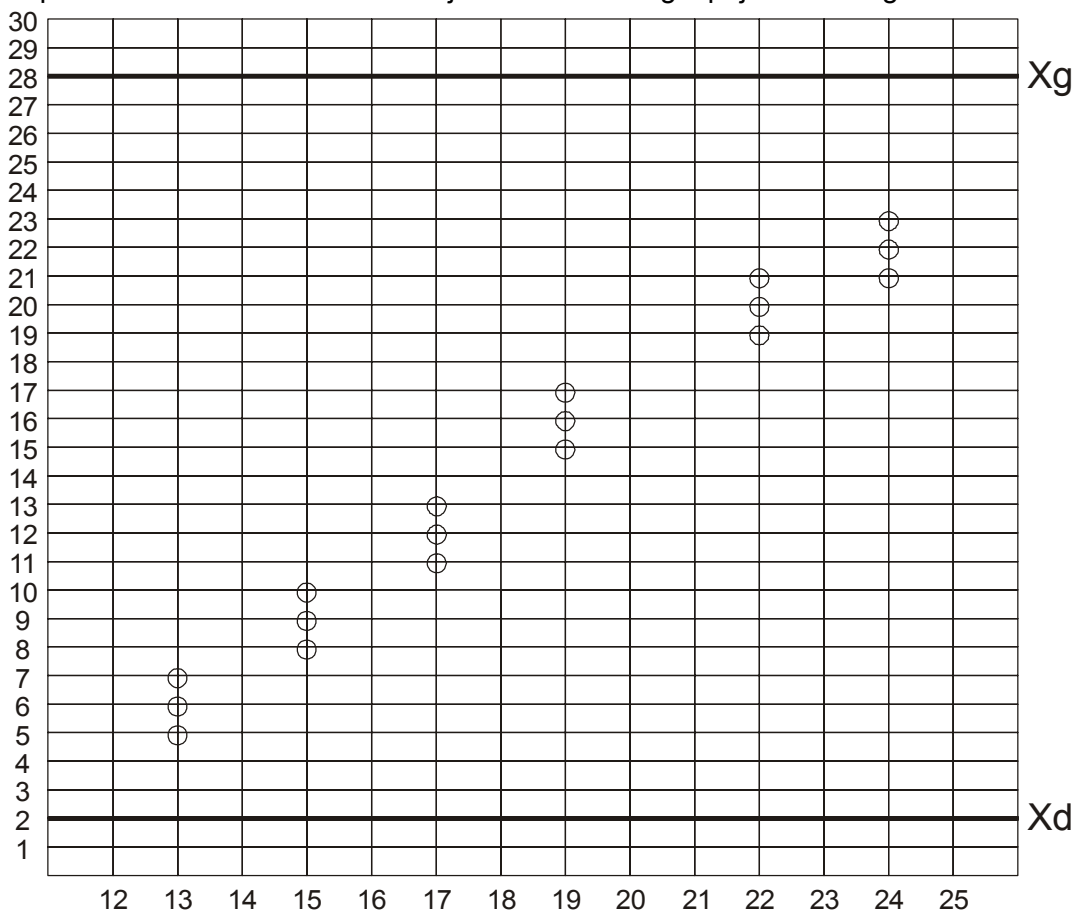
KATEDRA ZA PROIZVODNO MAŠINSTVO  
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA (0109)  
UPRAVLJANJE KVALITETOM PROIZVODA I (0117)

OKTOBAR 2003. god.

I grupa

## PISMENI ISPIT

1. Slikom 1 je prikazana jedna kontrolna x-karta sa trendom, za protekli proces. Na istoj karti su ucrtane i zadate tolerancijske granice za posmatrani proces. Nakon kog rednog broja izvučenog uzorka će proces morati da bude obustavljen da bi se izbegla pojava neusaglašenosti?



Slika 1: kontrolna x-karta sa trendom za protekli proces.

2. Pri serijskoj obradi spoljašnjim uzdužnim struganjem na meru  $x = 40$  [mm], izvučen je uzorak na osnovu koga je izvršeno testiranje hipoteze o normalnosti osnovnog skupa primenom  $\chi^2$ -testa. Tabelom 1 date su relativne učestanosti elemenata uzorka u određenim intervalima vrednosti karakteristike  $x$ .

Ukoliko se zna da pri testiranju nije vršeno sažimanje intervala  $i$  da je hipoteza o normalnosti osnovnog skupa bila na samoj granici prihvatljivosti, odrediti veličinu izvučenog uzorka  $N$ .

Tabela 1.

Srednje vrednosti intervala	$x_i$ [mm]	39.97	39.98	39.99	40.00	40.01	40.02	40.03
Relativne učestanosti	$f_i / N$	0.06	0.11	0.19	0.30	0.17	0.10	0.07

**PRVA GRUPA - REŠENJA****1. ZADATAK** (Linearna regresija)

Proračun parametara linearne regresije vršimo pomoću tabele 2.

**Tabela 2:** Pomoćna tabela za proračun koeficijenata linearne regresije.

		$X_i$						$f_j$ (I)	$f_j \cdot y_j$ (II)	$f_j \cdot y_j^2$ (III)
		13.0	15.0	17	19.0	22	24			
$y_j, j=(1, \dots, n)$	5	1	0	0	0	0	0	1	5	25
	6	1	0	0	0	0	0	1	6	36
	7	1	0	0	0	0	0	1	7	49
	8	0	1	0	0	0	0	1	8	64
	9	0	1	0	0	0	0	1	9	81
	10	0	1	0	0	0	0	1	10	100
	11	0	0	1	0	0	0	1	11	121
	12	0	0	1	0	0	0	1	12	144
	13	0	0	1	0	0	0	1	13	169
	15	0	0	0	1	0	0	1	15	225
	16	0	0	0	1	0	0	1	16	256
	17	0	0	0	1	0	0	1	17	289
	19	0	0	0	0	1	0	1	19	361
	20	0	0	0	0	1	0	1	20	400
	21	0	0	0	0	1	1	2	42	882
	22	0	0	0	0	0	1	1	22	484
	23	0	0	0	0	0	1	1	23	529
	$f_i$	(1)	3	3	3	3	3	3	$\Sigma(1) = \Sigma(I) = 18$	$\Sigma(II) = 255$
$f_i x_i$	(2)	39	45	51	57	66	72	$\Sigma(2) = 330$		
$f_i x_i^2$	(3)	507	675	867	1083	1452	1728	$\Sigma(3) = 6312$		
$\sum_{j=1}^n f_{ij} y_j$	(4)	18	27	36	48	60	66	$\Sigma(4) = 255$		
$y_{ij} = x_i \sum_{j=1}^n f_{ij} y_j$	(5)	234	405	612	912	1320	1584	$\Sigma(5) = 5067$		

- Ukupan broj merenja:

$$n = \Sigma(1) = \Sigma(I) = 18.$$

- Aritmetičke sredine:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i = \frac{\Sigma(2)}{\Sigma(1)} = 18.333,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i y_i = \frac{\Sigma(II)}{\Sigma(I)} = 14.167.$$

- Standardne devijacije:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\Sigma(3)}{\Sigma(1)} - \bar{x}^2} = 3.815,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{\Sigma(III)}{\Sigma(I)} - \bar{y}^2} = 5.786.$$

- Kovarijacija:

$$C_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{\Sigma(5)}{\Sigma(1)} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 21.778.$$

- Koeficijent korelacije:

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0.987 \text{ (jaka veza).}$$

- Koeficijenti prave regresije:

$$a_1 = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 1.497,$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = -13.278.$$

- Jednačina regresije:

$$\hat{y} = -13.278 + 1.497 \cdot x, \text{ odnosno: } X = -13.278 + 1.497 \cdot RB_{uzorka}.$$

Proces će morati da bude obustavljen pre nego što vrednost posmatrane karakteristike X dostigne gornju tolerancijsku granicu  $X_g = 28$ .

$$X_g = 28 = -13.278 + 1.497 \cdot RB_{uzorka} \Rightarrow$$

$$RB_{uzorka} = \frac{28 + 13.278}{1.497} = 27.574.$$

Dakle, proces će morati da bude zaustavljen nakon izvlačenja 27. uzorka da ne bi premašio gornju tolerancijsku granicu.

## 2. ZADATAK ( $\chi^2$ -test)

Najpre računamo vrednosti parametara lokacije i disperzije uzorka i za to koristimo tabelu 3.

**Tabela 3:** Pomoćna tabela za izračunavanje računskih vrednosti arit. sredine i stand. devijacije.

redni broj	$x_i$ [mm]	$f_i / N$	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$	$(x_i - a) \cdot f_i / N$	$(x_i - a)^2 \cdot f_i / N$
1.	39.97	0.06	-0.03	0.0009	-0.0018	0.000054
2.	39.98	0.11	-0.02	0.0004	-0.0022	0.000044
3.	39.99	0.19	-0.01	0.0001	-0.0019	0.000019
4.	40	0.30	0.00	0.0000	0.0000	0.000000
5.	40.01	0.17	0.01	0.0001	0.0017	0.000017
6.	40.02	0.10	0.02	0.0004	0.0020	0.000040
7.	40.03	0.07	0.03	0.0009	0.0021	0.000063
	$\Sigma$	1		$\Sigma$	-0.0001	0.000237

gde je:  $a = 40.00$  mm  $\equiv$  vrednost karakteristike kvaliteta sa najvećom frekvencijom.

Vrednost aritmetičke sredine uzorka dobijamo prema sledećem obrascu:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N} [\sum (x_i - a) \cdot f_i] = a + \sum (x_i - a) \cdot \frac{f_i}{N} = 40.00 - 0.0001 = 39.9999 \text{ mm,}$$

a standardnu grešku prema:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot [\sum (x_i - a)^2 f_i] - (\bar{x} - a)^2} = \sqrt{\sum (x_i - a)^2 \cdot \frac{f_i}{N} - (\bar{x} - a)^2} \Rightarrow$$

$$\sigma = \sqrt{0.000237 - (39.9999 - 40.00)^2} = 0.0154 \text{ mm.}$$

Provera hipoteze o normalnosti osnovnog skupa pomoću  $\chi^2$ -testa, vrši se prema tabeli 4:

**Tabela 4: Pomoćna tabela za primenu  $\chi^2$ -testa.**

r.br.	$x_i$ [mm]	$ x_i - \bar{x} $	$t = \frac{ x_i - \bar{x} }{\sigma}$	$\varphi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$	$\frac{f_t}{N} = \frac{d}{\sigma} \cdot \varphi(t)$	$\frac{f_e}{N}$	$\frac{ f_e - f_t }{N}$	$\frac{ f_e - f_t ^2}{N \cdot f_t}$
1.	39.97	0.0299	1.942	0.061	0.0393	0.06	0.021	0.010852
2.	39.98	0.0199	1.292	0.173	0.1124	0.11	0.002	0.000052
3.	39.99	0.0099	0.643	0.324	0.2107	0.19	0.021	0.002032
4.	40	0.0001	0.006	0.399	0.2590	0.3	0.041	0.006474
5.	40.01	0.0101	0.656	0.322	0.2089	0.17	0.039	0.007252
6.	40.02	0.0201	1.305	0.170	0.1105	0.1	0.011	0.001003
7.	40.03	0.0301	1.955	0.059	0.0384	0.07	0.032	0.026107
$\Sigma$					0.9798	1	$\chi^2/N =$	0.053772

Kod normalnog teorijskog rasporeda, broj stepeni slobode je definisan opštim izrazom:

$$k = m - m_1 - 3 = 7 - 0 - 3 = 4,$$

gde je  $m \equiv$  broj početnih grupnih intervala,  $m_1 \equiv$  broj sažetih grupnih intervala (u tekstu zadatka je rečeno da nije bilo sažimanja). Brojka 3 u proračunu označava da imamo tri dodatna uslova:  $\Sigma f_e$  (ova veličina još uvek nije poznata nama, treba da je izračunamo, ali je poznata izvođačima eksperimenta),  $\bar{x} = 39.9999$  i  $\sigma = 0.0154$ .

Prema UKP, metode 2, tab.VIII, str.243, za  $k = 4$  i uslov da je hipoteza o normalnosti osnovnog skupa bila na granici prihvatanja:

$$P(\chi^2 > \chi_q^2) = 0.05,$$

dobijamo vrednost  $\chi^2 = 9.488$ .

Prema tabeli 4 dobili smo da je:

$$\frac{\chi^2}{N} = 0.053772,$$

na osnovu čega izračunavamo traženi broj uzoraka:

$$N = \frac{\chi^2}{\frac{\chi^2}{N}} = \frac{9.488}{0.053772} = 176.449,$$

koji, da bismo bili na strani sigurnosti, zaokružujemo na prvu veću celobrojnu vrednost i konačno dobijamo:

$$N = 177.$$