

MAŠINSKO INŽENJERSTVO U PRAKSI

MEHANIKA - MEH

1. Istorijski razvoj nastave mehanike na Univerzitetu u Beogradu

Nastava iz oblasti mehanike, na ustanovama koje su preteča Univerziteta u Beogradu, odvijala se paralelno na Filozofskom odeljenju i na Tehničkom odeljenju. Ovde će biti dat kratak hronološki prikaz razvoja nastave iz mehanike, nazivi predmeta kao i profesori koju su predavali na tim predmetima:

- 1839 – 1853 - FILOZOFIJSKO ODELENIJE LICEUMA, Fizička mehanika (Konstantin Branković, Antonije Arnot, Sava Jovanović, Đorđe Mušicki, Janko Šafarik...),
- 1853 – 1863 - JESTESTOSLOVNO – TEHNIČESKOE ODELENIJE KNJAŽESKO SRBSKOG LICEJA, Mehanika (Filip Hristović, Emilijan Josimović, Dimitrije Nešić),
- 1879 – 1895 - PRIRODNO MATEMATIČKI ODSEK FILOZOFSKOG FAKULTETA VELIKE ŠKOLE, Teorijska mehanika (Ljubomir Klerić, Mijalko Ćirić),
- 1895 – 1905 - MATEMATIČKO FIZIČKI ODSEK FILOZOFSKOG FAKULTETA VELIKE ŠKOLE, Mehanika (Mijalko Ćirić, Kosta Stojanović),
- 1905 – 1939 - GRUPA NAUKA FILOZOFSKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU, Primenjena matematika (Mehanika, Nebeska mehanika, Teorijska fizika) (Kosta Stojanović, Milutin Milanković, Anton Bilimović, Vjačeslav Žardecki),
- 2.1.1953. god. Savet za prosvetu i nauku Narodne republike Srbije donosi odluku da se na Prirodno matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu osnuje nova GRUPA ZA MEHANIKU.

Nastava na visokoškolskom nivou, na Univerzitetu u Beogradu, u oblasti mašinstva započela je 20.12.1873. god. Tada je na predlog Akademskog saveta Velike škole, kao i izmenama i dopunama zakona o Tehničkom fakultetu, uveden predmet **Mehanika i nauka o mašinama**. Ovaj datum smatra se datumom početka izučavanja mašinske tehnike na Beogradskom univerzitetu. U cilju unapređenja nastave i savremenih tokova nauke

- 20.2.2013. god. Senat Univerziteta u Beogradu donosi odluku o formiranju Modula za mehaniku na Mašinskom fakultetu.

2. Mehanika kao naučna disciplina

Polazeći od poznate definicije šta je Mehanika, moguće je prepoznati oblasti koje Mehanika proučava:

1. Mehanika krutog tela,
2. Mehanika deformabilnog tela,
3. Mehanika fluida.

Takođe, kroz svaku naučnu oblast, za inženjere, neophodno je proći kroz dve neophodne instance:

1. Teorijsko razmatranje problema,
2. Praktično rešavanje postavljenog problema.

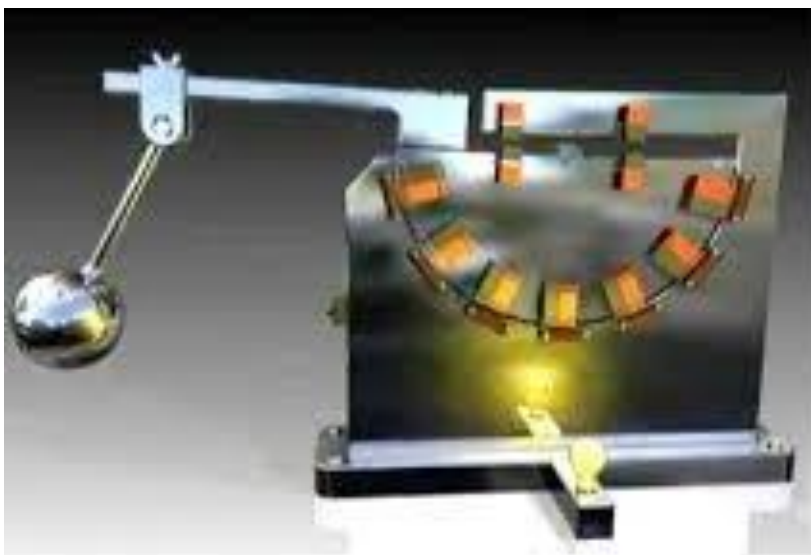
Modul za mehaniku omogućava savladavanje oba problema i široku prilagodljivost raznovrsnim problemima tehnike. U tom smislu potrebno je prvo predstaviti šta se od teorijskih osnova proučava, a zatim kako se ta teorijska znanja primenjuju u mašinskoj (ili nekoj drugoj) tehnici.

U daljem tekstu biće predstavljene putanje proučavanja mehanike.

3.1. Mehanika krutog tela - uvod

U okviru predmeta Mehanika M studenti se upoznaju sa izabranim poglavljima iz mehanike, a u cilju sticanja i primene stečenih fundamentalnih znanja, koja su nezaobilazna pri analizi, projektovanju i održavanju mehaničkih sistema. Koristeći dobro poznate mehaničke modele, kao što su materijalna tačka i kruto telo, a na osnovu opštih zakona dinamike, vrši se analiza kretanja sa jedne, dok sa druge strane, određuju se sile za realizaciju defini-sanog kretanja, što predstavlja polaznu tačku pri analizi i projektovanju gotovo svih mehaničkih sistema.

U prvom delu, na modelu materijalne tačke, predstavljena je analiza oscilatornog kretanja koje je opisano linearnim diferencijalnim jednačinama. Proučavanje oscilatornog kretanja ima veliki tehnički značaj pri analizi i konstruisanju raznih mašina i mehanizama, kao i sprečavanje neželjenih oscilatornih kretanja i



pojava, kao što je rezonancija. Sa druge strane, na osnovu teorije oscilatornog kretanja, mogu se objasniti mnoge značajne osobenosti različitih mehaničkih sistema.

U vojnoj i vazduhoplovnoj industriji, pri projektovanju tela promenljive mase, u prvom redu raketa, nezaobilazno je formiranje diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje tela. Sa razvojem nove računarske tehnike, u mogućnosti smo da vršimo kvantitativnu i kvalitativnu analizu kretanja tela promenljive mase u realnom okruženju, što će studentima, a na osnovu predhodno stečenog znanja u okviru numeričke analize, predstavljati polaznu osnovu pri projektovanju tela promenljive mase.



U okviru dinamike krutog tela, prikazan je postupak formiranja diferencijalnih jednačina obrtanja krutog tela oko nepokretne tačke, kao i opšteg kretanja krutog tela. Prikazana je približna teorija giroskopskih pojava, gde je ukazano na važnost i primenu giroskopa. Tehnička primena giroskopa je velika i rasprostranjena, i može se koristiti za izgradnju girokompasa koji dopunjavaju ili zamenjuju magnetne kompase (u brodovima, letelicama i vozilima u celini), stabilizatora (bicikli, svemirski teleskopi, brodovi, vozila itd.), ili da budu deo unutrašnjeg sistema navođenja.

Mnogi mehanički sistemi kako u mašinskoj, tako i u građevinskoj, rudarskoj i metaloprerađivačkoj industriji rade u okruženju izrazitih udarnih opterećenja. U okviru teorije udara, studenti se upoznaju sa osnovnim postavkama teorije udara, gde su primenom osnovnih zakona dinamike pri udaru (sudaru) u mogućnosti da vrše analizu udarnih opterećenja na realne mehaničke sisteme, u toku projektovanja i eksploatacije.

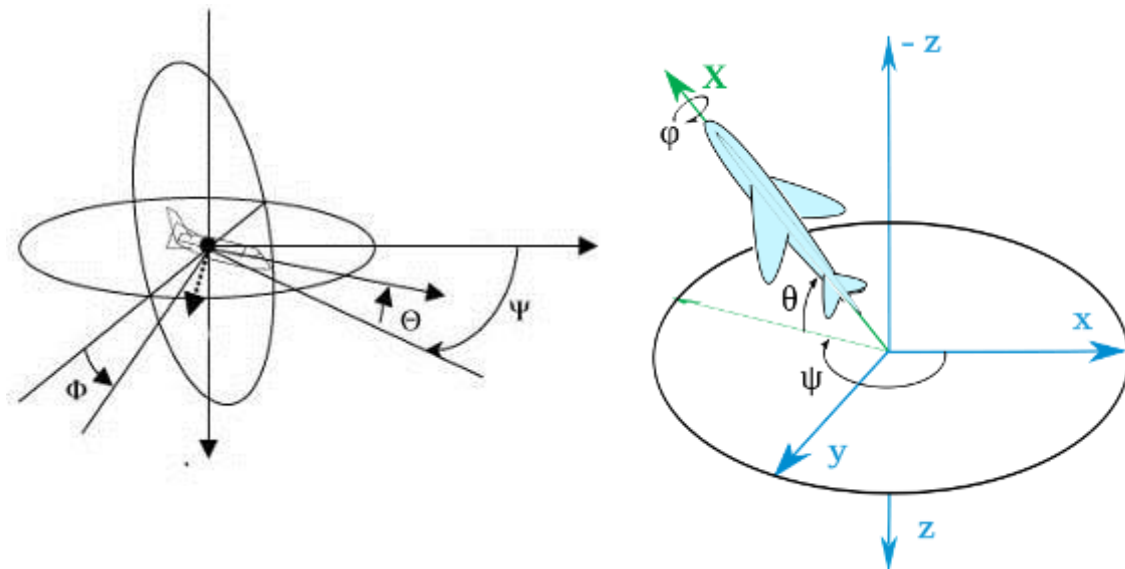


Kao što je delom predstavljeno, kroz izabrana poglavlja predmeta Mehanika M, studenti stiču znanja, koja se mogu sa jedne strane primeniti u rešavanju konkretnih inženjerskih problema iz realnog okruženja, dok sa druge strane, stiču osnovu za dalje usavršavanje u oblasti mehanike kako na diplomskim, tako i na doktorskim studijama.

3.2. Analitička mehanika

Njutnova mehanika (fizička mehanika) je logična koegzistentna teorija koja veoma dobro opisuje širok dijapazon pojava vezanih za kretanje materijalnih objekata, koji su dovoljno veliki (vidljivi običnim mikroskopom) i dovoljno spori (mnogo sporiji od brzine svetlosti). Koristeći matematički aparat, vektorske i funkcionalne analize, Njutnova mehanika analizira veličine kao što su sila, količina kretanja, energija, itd isključivo u fizičkom trodimenzionalnom prostoru. Međutim, sa razvojem fizike, Njutnova mehanika i njen formalizam pokazali su se manje podesnim i univerzalnim za proučavanje i opisivanje složenih fenomena prirode, od metode i formalizma analitičke mehanike.

Analitička mehanika, kao oblast klasične mehanike je puno opštija od Njutnove mehanike, jer probleme kretanja razmatra u apstraktnim generalizovanim matematičkim prostorima, koristeći aparat varijacionog računa. Zahvaljujući toj činjenici, formalizam analitičke mehanike uspešno se primenjuje u teoriji kvantne mehanike, teoriji polja, teoriji relativiteta i drugim naukama (biologiji, ekonomiji). Osnove analitičke mehanike dao je Lagranž (1736-1813) sa ciljem da ujedini i predstavi, sa iste tačke gledišta, razne do tada nađene principe mehanike. Najpogodniji objekti za realizaciju te ideje su materijalni sistemi sa vezama. Analiza mogućih, vezama dozvoljenih, pomeranja tačaka sistema, virtuelnog rada sila i Lagranževe funkcije dozvoljava da se kretanje materijalnog sistema sa holonomim i neholonomnim vezama opiše skalarnim diferencijalnim jednačinama drugog reda, koje su u analitičkoj mehanici poznate kao Lagranževe jednačine druge vrste. Lagranžev formalizam i elementi varijacionog računa pokazali su se vrlo efikasnim u rešavanju problema: kretanja neholonomnih sistema (sistema sa vezama tipa sečiva, kotrljanja tela po pokretnim i nepokretnim površinama), sfernog, opšteg i složenog kretanja krutih tela (giroskopa, robotskih sistema, slobodnih krutih tela), kretanja sistema promenljive mase, poremećenog kretanja i stabilnosti neporemećenog kretanja materijalnih sistema, kretanja materijalnih sistema pri kojima se realizuje ekstremna vrednost zadatog funkcionala (brahistohronog kretanja).



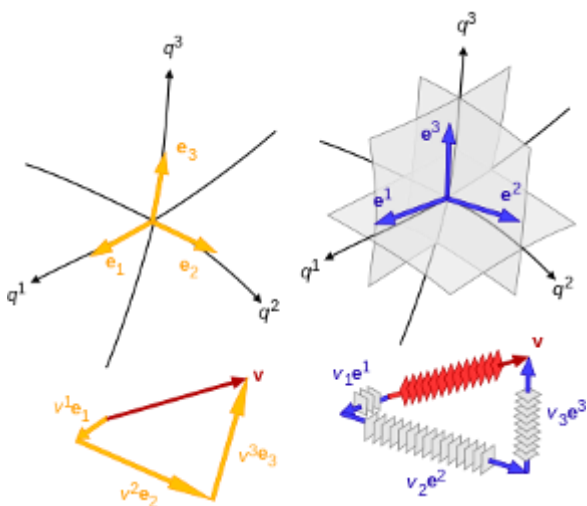
Posebno važno mesto u analitičkoj mehanici predstavljaju principi mehanike. Na osnovu njih se mogu formirati diferencijalne jednačine kretanja, ili se neposredno, analitičkim i numeričkim metodama, mogu analizirati karakteristike kretanja. Diferencijalni principi (D'alambertov, Gausov) izražavaju lokalna svojstva kretanja, koja važe u svakom položaju sistema. Integralni principi izražavaju globalna svojstva kretanja i dati su u obliku integralnih funkcionala. U mehanici posebno važno mesto zauzimaju Hamiltonov i Lagranž-Mopertijev princip minimuma dejstva, kao i njegova geometrijska interpretacija u formi Jakobijevog principa. Principi minimuma dejstva ukazuju, u

opštem, na jedinstvo materije na nivou različitih struktura, s obzirom da se specijalni zakoni i teorije u pojedinim oblastima fizike mogu izvesti iz njih.

Rešavajući probleme rasprostiranja svetlosti u optički nehomogenim i anizotropnim sredinama, Hamilton (1805-1865) je došao do tzv. Hamiltonovih, odnosno, kanonskih jednačina. Sam Hamilton je pokazao da se ove jednačine mogu uspešno primeniti i u analitičkoj mehanici. U Hamiltonovoj mehanici stanje kretanja materijalnog sistema opisano je kanonskim promenljivim čiji je broj dva puta veći od broja stepeni slobode materijalnog sistema. Kanonske jednačine kretanja holonomnih potencijalnih materijalnih sistema su prvog reda po kanonskim promenljivim, a njihov integral može se odrediti pomoću Hamilton-Jakobijeve teoreme. Kanonske jednačine čuvaju svoj oblik ne samo pri koordinatnim transformacijama promenljivih kao Lagranževe jednačine druge vrste, već i pri tzv. kanonskim transformacijama. Za Hamiltonov formalizam usko je vezana i Poankare-Kartanova integralna invarijanta iz koje se mogu izvesti Vitekerove jednačine, Jakobijeve jednačine, kanonske transformacije. Hamiltonov formalizam se uspešno primenjuje za opisivanje stanja i rešavanje problema kretanja u nebeskoj mehanici, teoriji optimalnog upravljanja, teoriji nelinearnih oscilacija.

3.3. Mehanika kontinuuma

Mehanika kontinuuma, koja u svoje temelje stavlja opštost metoda, strogost i apstraktnost

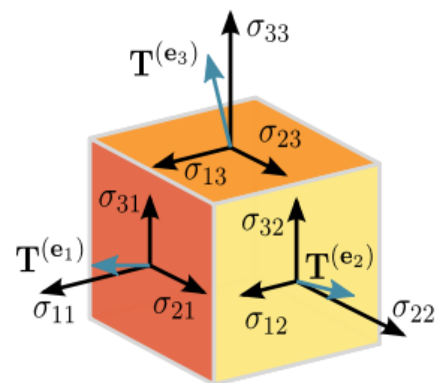
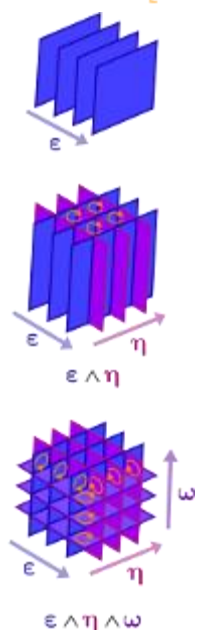


aksiomatskih sistema, kao i fizičke osnove poznavanja materijala, baza je nad kojom se mogu prirodno razvijati teorije i inženjerske metode vezane za deformabilna tela, a koje se izučavaju u teoriji elastičnosti, mehanici fluida, teoriji plastičnosti, mehanici loma, reologiji, metodi konačnih elemenata.

Premda Mehanika kontinuuma vuče svoje korene još iz antičkih vremena, forma u kojoj se danas drže predavanja iz ove oblasti nastala je u drugoj polovini XX veka. Ovu "renesansu" mehanike kontinuuma dugujemo nekoliko faktorima: procvatu relevantnih matematičkih disciplina (linearne algebre, parcijalnih diferencijalnih jednačina, diferencijalne

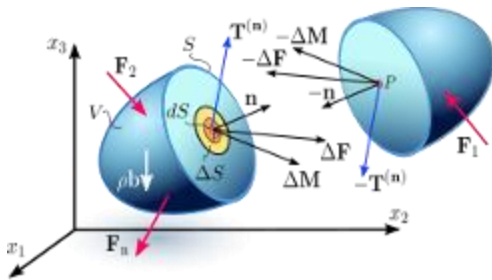
geometrije sa tenzorskim računom), napretku u kreiranju novih materijala i tehnologija mašinskih sistema, kao i pojavi savremene računarske tehnike i tehnologije.

Ukoliko je pri dejstvu sila promena oblika i zapremine nekog tela zanemarljiva, njega možemo smatrati krutim. U protivom slučaju telo ne možemo smatrati krutim i nazivamo ga deformabilnim. Rastojanja između pojedinih tačaka deformabilnog tela menjaju se tokom vremena, te je pri vrlo velikom broju tačaka i broj stepeni slobode veoma veliki. Na primer, ako jedan molgram tela ima oko 6×10^{23} molekula, broj stepeni slobode bi bio $3 \times 6 \times 10^{23}$, tj. $1,8 \times 10^{24}$. Takođe, mi nemamo nikakvu mogućnost da odredimo početne položaje i brzine pojedinih tačaka realnih tela, a, sem toga, još ni do danas ne poznajemo u potpunosti prirodu sila koje dejstvuju između elementarnih čestica. Čak i kada bismo znali tačnu prirodu ovih sila i početne položaje i



brzine tačaka, klasičan metod dinamike tačaka bi bio praktično neupotrebljiv zbog ogromnog broja tih tačaka; stoga proučavanje kretanja i mirovanja deformabilnih tela zateva principski drugačiji pristup.

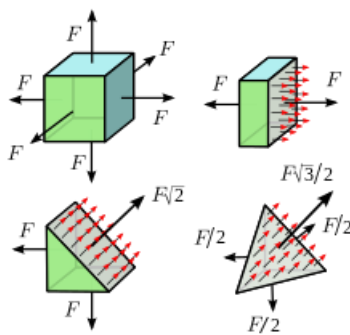
Aproksimativni metod sastoji se u tome da se, umesto tačaka, posmatraju vrlo mali delovi tela, i to



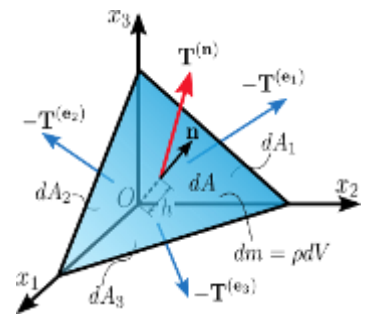
takvi da se mogu smatrati još dovoljno velikim u odnosu na rastojanja između susjednih tačaka. Ovakvi vrlo mali delovi tela zauzimaju vrlo male elemente zapremine, za koje možemo reći da su beskonačno male u fizičkom, no ne i u matematičkom smislu. Ako deformabilno telo posmatramo na izloženi način, svaki ovakav element zapremine sadrži veliki broj tačaka. Stoga, u prvoj aproksimaciji možemo uzeti da je u svakom ovom elementu zapremine materija raspoređena neprekidno i u tom smislu se govori o

neprekidnoj sredini – kontinuumu, a mehanika deformabilnog tela postaje mehanika kontinuuma.

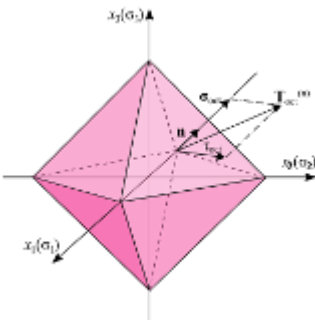
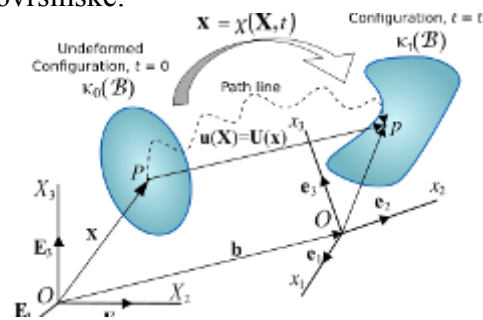
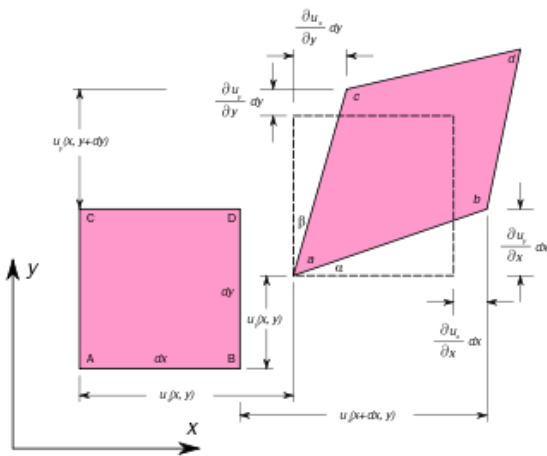
Ovaj prelaz sa diskontinuumu na kontinuum odgovara prelazu sa



veoma velikog na beskonačan broj tačaka, te i broj stepeni slobode postaje beskonačno veliki. Tada tačke više ne možemo numerisati indeksima, već prostornim koordinatama koje se menjaju kontinuirano. Na ovaj način izbegavaju se sile koje dejstvuju na pojedinačne tačke, kao i početna kinematska stanja svih tačaka. Umesto



sila koje dejstvuju na pojedine tačke uvode se makrofizičke sile koje dejstvuju na uočene elemente tela, pri čemu postoje dve vrste ovakvih sila: zapreminske i površinske.

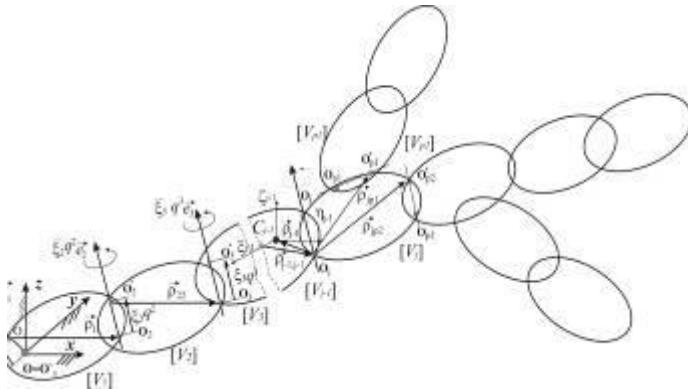


Osnovni pristupi u mehanici kontinuuma su Ojlerov i Lagranžov pristup kontinuumima, kao i osnove tenzorskog načina obeležavanja i izračunavanja. Tako se mogu odrediti komponente napona i deformacije, izračunavati tenzori napona i deformacije, postavljati jednačine kontinuiteta, Navije-Stoksove jednačine i druge, s ciljem da se stekne neophodna teorijska baza za lakše praćenje teorije elastičnosti, mehanike fluida, metode konačnih elemenata.

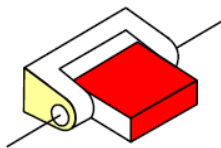
3.4. Primena Mehanike krutog tela

Jedna od primena je mehatronska robotika. Ona predstavlja posebnu oblast robotike koja se u svom većem delu bavi mehanikom robota, a u manjem delu osnovnim zadacima upravljanja kretanjem robota. Ona se izdvojila, odnosno nastala, kao rezultat činjenice najnovijeg razvoja savremene robotike kao interdisciplinarne nauke (primer nano-robota), pri čemu savremena robotika obuhvata pored mašinstva, elektronike, računarstva (mehatronike), i biologiju, kognitivne nauke, nanotehnologije i bioinženjering.

U okviru mehatronske robotike proučavaju se najvažniji segmenati dinamike sistema tela, primenom metoda Analitičke mehanike sa posebnim naglaskom na zadatke mehanike specifične za robotske sisteme. Time se stvaraju uslovi da se izložene metode i postupci primene i na ostale segmente mašinske tehnike.



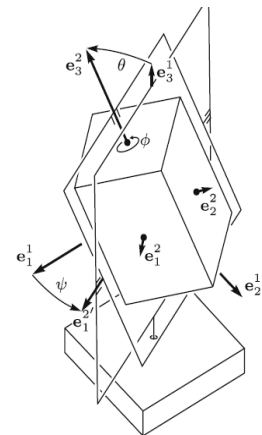
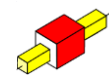
Istorijski posmatrano, može se reći da robotika ima svoje početke još srednjem veku, u doba renesanse. Početkom šesnaestog veka, Leonardo da Vinči izradio je jednu vrstu mehaničkog automata - mehaničkog lava u čast Luja XII. Tek početkom XX veka reč "ROBOT" je ušla u širu upotrebu kada je 1923. godine na engleski jezik prevedena češka drama RUR (Rossumovi univerzalni roboti) filozofa Karela Čapeka.



Danas su mnogi mehanički, vazduhoplovni sistemi (mehanizmi, biomehanički sistemi, transportne mašine i uređaji, robotski sistemi, veštački sateliti, drumska i šinska vozila) veoma često kompleksni i sastoje se iz međusobno

povezanih elemenata koji su poznati u literaturi kao sistem tela. Uočava se da se mnogi prethodno navedeni sistemi mogu sa dovoljnom tačnošću modelirati kao sistem krutih tela gde su deformacije tela male i mogu se zanemariti. Ako to nije slučaj, imamo sistem deformabilnih tela.

Ovde će robotski sistem, RS kao mehanički sistem, biti predstavljen mehaničkim modelom - *sistemom krutih tela* pri čemu konačan broj tela u sistemu nije ograničen. Tko međusobno povezana tela formiraju ili otvoreni kinematički lanac sa grananjem - sa strukturom topološkog drveta, ili zatvoreni. Pri tome tela (V_{i-1}) i (V_i) čine kinematički par V klase koji dopušta ili pravolinijsku translaciju ili rotaciju tela (V_i) u odnosu na telo (V_{i-1}) .



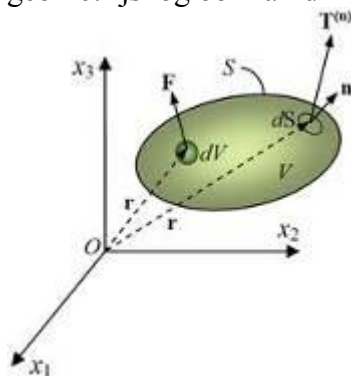
Takođe, ne manje izazovan, složen i zahtevan zadatak predstavlja i upravljanje kretanjem datim RS koji kao takav donosi specifičnosti i poteškoće u rešavanju, gde su razvijene posebne metode i koncepti upravljanja. U tom smislu, daje se pregled sa osnovama istih kao što je savremena teorija optimalnog upravljanja, ekspertni sistemi, sinergijsko upravljanje, upravljanje u kliznom režimu, inteligentni sistemi upravljanja (fuzzy logic kontroleri, genetski algoritmi).

Sada je posebno aktuelna primena teorije računa necelobrojnog reda (fractional calculus).

Poseban aspekt predstavljaju softverski paketi odnosno razvojna okruženja za simulaciju RS i oni imaju značajnu ulogu u rešavanju praktičnih problema za dati RS (primer Cyberbotics Webots).

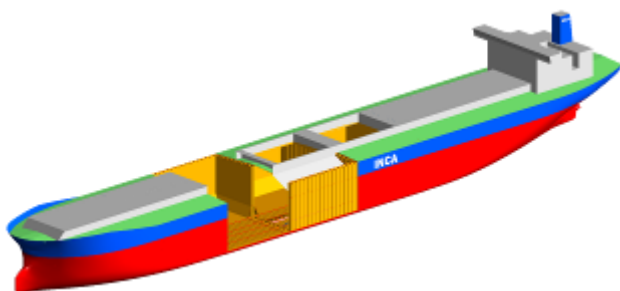
4. Mehanika deformabilnog tela

Teorija elastičnosti je posebna i veoma zanimljiva oblast matematičke fizike koja proučava zavisnost između spoljašnjeg opterećenja, unutrašnjih sila - napona, elastičnih deformacija, geometrijskog oblika i dimenzija materijalnog tela i njegovih mehaničkih osobina.

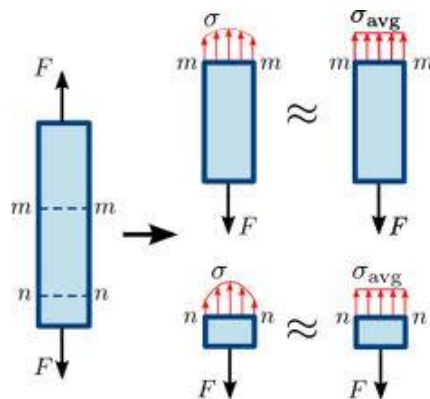


Određivanje unutrašnjih sila - napona i odgovarajućih deformacija za poznato opterećenje i za telo proizvoljnog oblika, veoma je složen problem koji do danas još nije rešen u egzaktnom obliku. Za sada postoje samo matematički i tehnički prihvatljiva rešenja za dve vrste tela relativno jednostavnog oblika. Kod jednih su poprečne dimenzije male u odnosu na dužinu (štapovi i grede), a kod drugih je jedna dimenzija mala u odnosu na druge dve (ploče i ljuske).

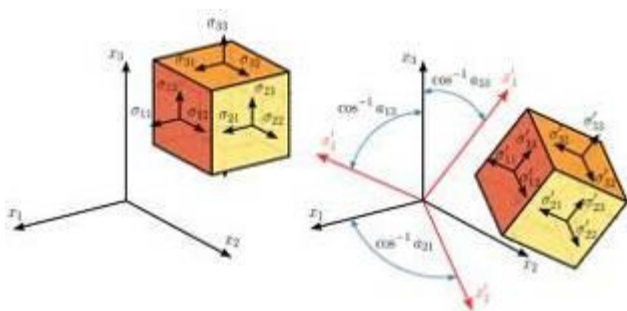
Iako u mašinskoj tehnici ne postoje realne konstrukcije sa matematički zanemarljivim dimenzijama, pokazalo se da se u praksi one zaista mogu zanemariti. Tako za pojedinačne delove većine konstrukcija kao što su brodovi, avioni, dizalice, bageri, možemo sasvim opravdano da kažemo da su ekvivalentni grednim nosačima, pločama ili ljuskama, napravljenim od različitih materijala.



Do sada razvijeni principi i metode Teorije elastičnosti mogu se primeniti na tako idealizovana tela. Najjednostavnija primena te teorije koja na lak i popularan način obrađuje neke specijalne probleme od praktičnog značaja kod nas se naziva Otpornost materijala i Otpornost konstrukcija. Tako su dobijena praktično primenljiva, a ujedno i tehnički veoma efikasna rešenja za veoma veliki broj elemenata različitih mašinskih konstrukcija.



Danas se Teorija elastičnosti za određivanje odnosa između sila i deformacija oslanja na Hukov zakon. Njemu se dodaju odgovarajuće geometrijske jednačine. One omogućavaju da se deformacije izraze preko pojedinačnih komponenti pomeranja pojedinih tačaka, translacije i rotacije.



Da bi u Teoriji elastičnosti mogao da se primeni savremeni tenzorski, diferencijalni i integralni račun, materijalna tela moramo da posmatramo kao neprekidne elastične sredine. Pretpostavka o neprekidnosti elastične sredine povezuje Teoriju elastičnosti sa Mehanikom kontinuuma.

Kako su u mašinskim konstrukcijama dozvoljene deformacije male u odnosu na dimenzije tela, može se primeniti i princip superpozicije. Za taj princip nije važan redosled dejstva opterećenja i redosled nastanka deformacija. On omogućava da se sabiranjem dejstava pojedinačnih opterećenja dobiju tehnički prihvatljive rezultujuće vrednosti.

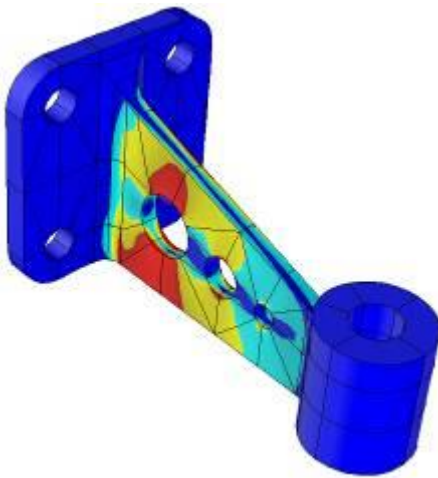
Iako su savremene matematičke metode tehničke Teorije elastičnosti dostigle veoma visok stepen pouzdanosti, ne mogu se lako primeniti na tela složenog geometrijskog oblika. Da bi se dobila pouzdana rešenja i takvih složenih problema, za rešavanje jednačina Teorije elastičnosti primenjuju se i različite numeričke metode. Trenutno je najrazvijenija i najrasprostranjenija Metoda konačnih elemenata.

4.1. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je danas najopštija numerička metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina, primenjena u gotovo svim naukama, a posebno u inženjerskim oblastima. Smatra se da je metoda konačnih elemenata, u poređenju sa drugim metodama, imala najveći uticaj na razvoj i domete tehničkih disciplina u dvadesetom veku. Upotreba ove metode doživljava nagli porast razvojem računara, kada su stvoreni novi uslovi za analizu i proračun složenih inženjerskih konstrukcija. Veliki broj vodećih međunarodnih časopisa, čitava industrija za razvoj softvera na osnovama metode konačnih elemenata, svakodnevna primena komercijalnih i specijalnih programskih paketa baziranih na metodi konačnih elemenata u različitim inženjerskim disciplinama najkraće su ilustracija prethodne tvrdnje. U razvijenim zemljama kursevi iz metode konačnih elemenata na redovnim i postdiplomskim studijama na tehničkim fakultetima postali su deo opšteg obrazovanja studenata.

Osnovne karakteristike metode konačnih elemenata, koje je dovode ispred drugih metoda, sastoje se u njoj opštosti (primenljiva je na oblast čvrstih tela, fluida, provođenja toplote, i uopšte na probleme polja fizičkih veličina, kao i na spregnute probleme), primenljivosti i na linearne i nelinearne probleme, relativnoj jednostavnosti i pogodnosti u pogledu primene računara. Za

strukture izložene različitim opterećenjima (mehaničkim, termalnim, vibracijama), upotrebom ove metode, moguće je izračunati napone, temperature, pomeranja i deformacije unutar prihvatljivih definisanih granica. Kao rezultat rada u oblasti metode konačnih elemenata i mogućnosti primene u inženjerskoj praksi, razvijen je veliki broj komercijalnih paketa opšte namene kao što su CATIA, ANSYS, PATRAN, NASTRAN, ABAQUS, FEMAP i dr.



```
% E: modulus of elasticity
% I: second moment of area
% L: length of bar
E=1e6; L=10; t=L/1000;I=t^3/12; EI=E*I;

% generation of coordinates and connectivities
numberElements=3;
nodeCoordinates=linspace(0,L,numberElements+1)';
xx=nodeCoordinates;L=max(nodeCoordinates);
for i=1:numberElements;
    elementNodes(i,1)=i;
    elementNodes(i,2)=i+1;
end
numberNodes=size(nodeCoordinates,1);
xx=nodeCoordinates(:,1);

% distributed force
P=-1000;

% for structure:
% displacements: displacement vector
% force : force vector
% stiffness: stiffness matrix
% GDof: global number of degrees of freedom
GDof=2*numberNodes;
%U=zeros(GDof,1);
stiffnessSpring=zeros(GDof+1);
forceSpring=zeros(GDof+1,1);

% stiffness matrix and force vector
[stiffness,force]=...
formStiffnessBernoulliBeam(GDof,numberElements,...
    elementNodes,numberNodes,xx,EI,P);
```

Diferencijalne jednačine, kojima se opisuju različite fizičke pojave u kontinuumima, zbog kompleksnosti, nemoguće je rešiti analitičkim metodama. Zbog toga se posmatrani kontinualni fizički sistem deli na individualne komponente ili elemente. Ovo „razbijanje“ sistema na manje elemente naziva diskretizacija. Jednačine se postavljaju za svaki element. Kako svaki element interaguje sa svojim susednim elementom, neophodno je „rekonstruisati“ prethodni sistem blokovima elemenata. Upotrebom računara, diskretizovani sistemi se brzo i efikasno rešavaju. Na sledećoj slici prikazana je struktura diskretizovana pomoću metode konačnih elemenata.

Osim da samo budemo korisnici već postojećih komercijalnih softvera baziranih na metodi konačnih elemenata, na jednostavnijim primerima, poput gređa i ploča, možemo i samostalno pisati programske kodove. Tako ćemo, od korisnika, postati i kreatori softvera. Na sledećoj slici prikazan je deo programskog koda u Matlab-u.

5. Mehanika fluida

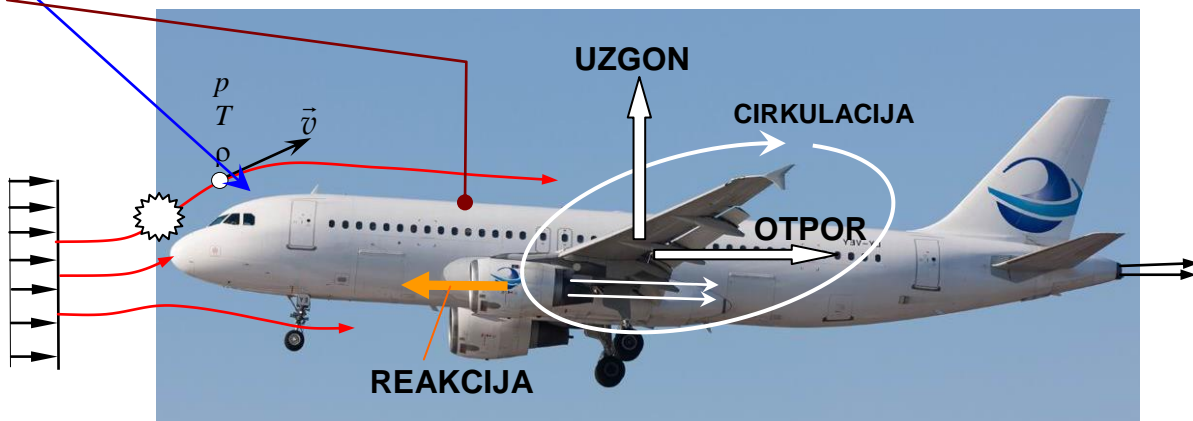
U okviru Mehanike fluida proučavaju se važni inženjerski problemi koji se odnose na oblasti: vazduhoplovstva, termoenergetike, termotehnike, hirdoenergetike, procesne tehnike, opstrujavanja građevinskih objekata, automobila, vozova itd.

Za proučavanje strujanja koriste se osnovni zakoni fizike:

Zakon o održanju mase (jednačina kontinuiteta) + Zakon kretanja (Navije-Stoksove jednačine) + Zakon o održanju energije = Osnovni sistem jednačina

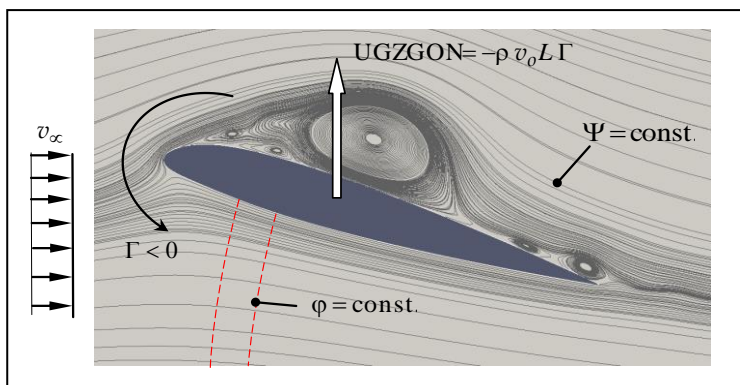
+ Jednačina stanja kod stišljivih strujanja.

Da bi se sistem jednačina rešio dodaju se granični uslovi za: brzinu strujanja, pritisak i temperaturu.



Klase strujanja koje se proučavaju u kursu su:

- jednodimenzijaska nestišljiva strujanja fluida u u složenim cevovodima,
- hiroudar u cevovodima,
- dvodimenzijaska potencijalna strujanja,
- jednodimenzijaska stišljiva strujanja fluida u cevima i mlaznicima,
- udarni talasi,
- turbulentna strujanja i
- granični sloj.



DVODIMENZIJSKA POTENCIJALNA STRUJANJA

Za neviskozno strujanje fluida kada brzina ima potencijal (ϕ) strujanje se opisuje Koši-Rimanovim jednačinama, iz kojih se kao rešenje dobijaju potencijali brzine i strujnice (ψ). U kompleksnoj ravni proučavaju se osnovna strujanja: jednolika struja, izvor, ponor, vrtlog i dvopol. Primenom metode superpozicije dobijaju se rešenja

za složena potencija strujanja oko opstrujanih tela. U rezultatu analize sila koje deluju na telo u potencijalnoj struji fluida dobija se sila uzgona, kao i da je sila otpora jednaka nuli (D'alambertov paradoks). Primenom metode konformnog preslikavanja poznato strujanje iz jedne kompleksne ravni preslikava se u drugo potencijalno strujanje u drugoj kompleksnoj ravni.

TEORIJA SLIČNOSTI

Osnovni sistem jednačina koji čine jednačine kontinuiteta, Navije-Stoksa i energije, transformišu se na bezdimenzijski oblik i analizom odnosa njihovih pojedinih članova dobijaju se bezdimenzijski brojevi: Struhala, Ojlera, Maha, Fruda, Arhimeda, Ričardsona, Rejnoldsa, Grashofa, Peklea i Nuselta. Ovi brojevi se kao karakteristični koriste pri ostvarivanju uslova dinamičke sličnosti.



Teorija sličnosti definiše pod kojim se uslovima strujanje sa modela ispitanog u laboratoriji preslikava na glavno izvođenje. Tom prilikom koriste se kriterijumi sličnosti:

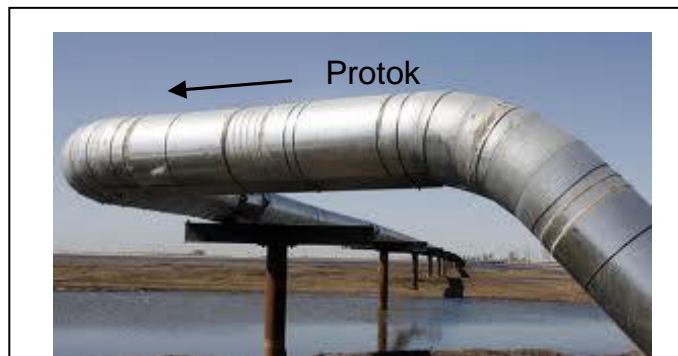
- geometrijski,
- kinematski i
- dinamički.

JEDNODIMENZIJSKO STRUJANJE NESTIŠLJIVOG FLUIDA KROZ CEVOVODE

- Proračun složenih cevovoda
- Hidroudar

JEDNODIMENZIJSKO STRUJANJE GASOVA

- Izentropsko strujanje
- Izotermno strujanje gasa u cevovodima
- Adijabatsko strujanje gasa
- Strujanje gasa sa razmenom količine toplote
- Strujanje kroz mlaznike
- Prav i kos udarni talas

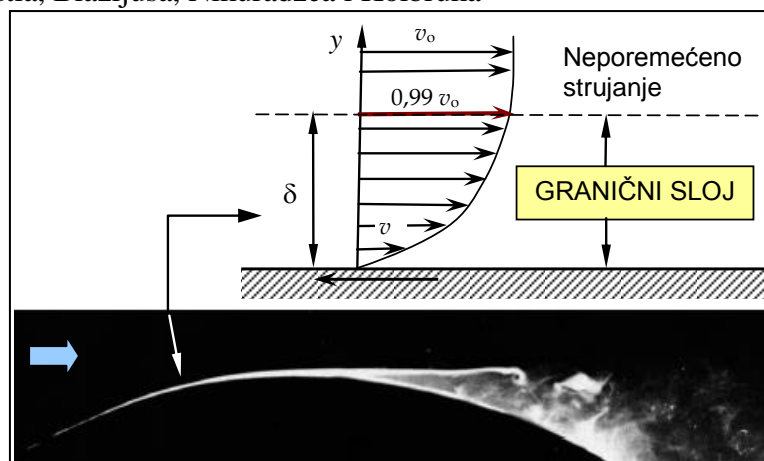


TURBULENTNO STRUJANJE

- Rejnoldsove jednačine
- Modeliranje turbulentnih napona, algebarski i diferencijalni modeli
- Univerzalni turbulentni profil brzina, zakon deficita brzine
- Koeficijent trenja - formule Prandtla, Blazijusa, Nikuradzea i Kolbruka

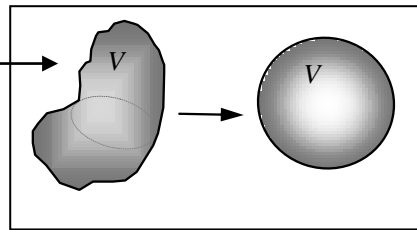
GRANIČNI SLOJ

- Prandtlove jednačine graničnog sloja
- Integralne karakteristike graničnog sloja
- Integralne jednačine graničnog sloja
- Metoda Karman-Polhauzena
- Granični sloj na ravnoj ploči



5. 1. Multifazna strujanja

Vrste mešavina
Stvarna i idealizovana čestica
Faktori oblika
Sitovna analiza



JEDNAČINE KOJE OPISUJU MULTIFAZNO STRUJANJE

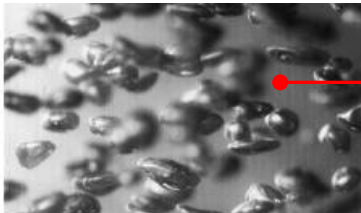
➤ Jednačine kretanja = Fluid + Disperzna faza

Ojler + Ojler



Ojler + Lagranž

- jednačina kontinuiteta
- jednačina difuzije
- jednačina energije
- granični uslovi
- Analiza sila koje deluju na česticu
- Sila otpora,
- Koefficient otpora
- Brzina taloženja u njutnovskom i nenjutnovskom fluidu



- Poroznost
- Koncentracije - masene i zapreminske
- Faktori protočnosti
- Srednje vrednosti
- Merenje masene koncentracije

FLUIDIZOVANI SLOJ

- Primena fluidizacije
- Procesi razmene u fluidizovanom sloju
- Fazni dijagram
- Prva kritična brzina fluidizacije
- Druga kritična brzina fluidizacije
- Pad pritiska u poroznom sloju
- Pad pritiska u nestišljivom FS
- Stišljivi fluidizovani sloj
- Razmena toplote u FS
- Sagorevanje u FS

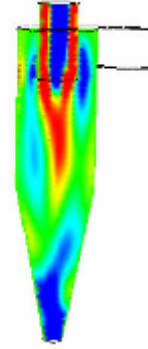
PNEUMATSKI TRANSPORT

- Sistemi pneumatskog transporta
- Pneumatsko korito
- Vertikalni pneumatski transport
- Leteći pneumatski transport
- Pada pritiska pri letećem pneumatskom transportu sa nestišljivim fluidom
- Leteći pneumatski transport pri stišljivom izotermnom strujanju
- Kritična brzina strujanja



SEPARACIJA

- Stepen korisnosti
- Komorni separatori
- Cikloni
- Vrećasti filtri
- Elektrostatički separatori
- Izbor separatora
- Proračun separatora



DVOFAZNA STRUJANJA

- Režimi strujanja
- Mape režima
- Jednodimenzijski model strujanja
- Pad pritiska – Metoda Lokart-Martineli
- Hidraulička karakteristika
- Dvofazna strujanja sa razmenom toplote



MEHURASTO KLINASTO ANULARNO

STRATIFIKOVANO

JASTUČASTO

HIDRAULIČKI TRANSPORT

- Sistemi hidrauličkog transporta
- Kritična brzina fluida
- Režimi strujanja suspenzija
- Strujanje homogene mešavine
- Proračun pada pritiska pri strujanju homogene mešavine
- Optimalna koncentracija pri laminarnom strujanju homogene mešavine u horizontalnom cevovodu
- Određivanje optimalne koncentracije pri laminarnom strujanju suspenzije u kosom cevovodu
- Laminarno strujanje homogene suspenzije
- Strujanje nehomogene mešavine
- Horizontalni hidraulički transport



- Hidraulički transport nehomogene mešavine u kosom cevovodu
- Pneumo-hidraulički lift

UREĐAJI PNEUMATSKOG TRANSPORTA

- Usisnici
- Dozatori
- Ejektori

6. Zaključak

Prethodno opisani procesi i pojave mogu poslužiti za modeliranje i rešavanje najvećeg broja inženjerskih problema. Pažljivim čitanjem prikazanog teksta može se zaključiti da se rešavanjem opisanih mehaničkih modela može rešiti većina praktičnih problema koji će se jednog dana, tokom rada, naći pred mašinskim inženjerom.